Math
634

Die körperliche

Raum-Grössen-Lehre

mit Inbegriff

der sphärischen Trigonometrie, der beschreibenden Geometrie, der Projektion der Schatten und der Perspektive,

zum Gebrauche

an höhern technischen Lehr-Anstalten

besonders

aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte,

bearbeitet

und mit Uebungs-Beispielen versehen

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Fr. W. Universität, an der Königl. allgem. Krieges-Schule und an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingen. Schule zu Berlin; der Kais. Ruß. Akademie der Wissensch. zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wiss. zu München, so wie mehrerer anderer gelehrten Gesellschaften korresp. Mitglied.

Zweite Auflage. Mit 5 Figurentafeln.

Berlin 1839.

Jonas Verlags-Buchhandlung.

Die reine

Elementar-Mathematik,

zum Gebrauche

an höhern technischen Lehr-Anstalten

besonders

aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte,

bearbeitet

und mit Uebungs-Beispielen versehen

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Fr. W. Universität, an der Königl. allgem. Krieges-Schule und an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingen. Schule zu Berlin; der Kais. Ruß. Akademie der Wissensch. zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wiss. zu München, so wie mehrerer anderer gelehrten Gesellschaften korresp. Mitglied.

Dritter Band. Zweite Auflage.

Die Analysis erfindet; die Synthesis begründet; und nur beide Methoden in Verbindung führen zum gründlichen und umfassenden Wissen.

Berlin 1839.

Jonas Verlags-Buchhandlung.

Auszug
aus der

Vorrede zur ersten Auflage.

Für den Techniker ist in der Regel kein Theil der Geometrie wichtiger als die Körperlehre, und vorzüglich die Bestimmung der Lage der Punkte, der Linien und der Ebenen gegen einander, wenn solche durch irgend Bedingungen gegeben sind. Es ist daher in dem gegenwärtigen Werke vorzügliche Sorgfalt auf das erste und achte Kapitel verwendet; und der Anfänger kann sich nicht besser befähigen, die übrigen Kapitel mit Leichtigkeit aufzufassen, als dadurch, daß er in diese genannten Kapitel mit allem Eifer und Fleiße einzudringen sucht. Nur wenn diese beiden Kapitel gehörig einstudirt sind, wird alles Uebrige keine Schwierigkeit weiter gewähren.

Bei den kürzern Beweisen oder bloßen Beweis-Andeutungen haben Selbstlernende, die nicht augenblicklich den Zusammenhang einsehen sollten, bloß darüber nachzu-

denken 1) was erwiesen oder gefunden werden soll, 2) was gegeben oder vorausgesetzt ist, endlich 3) welche Mittel, d. h. welche der vorhergehenden Sätze wohl Anwendung finden könnten, um aus dem gegebenen (den Bedingungen, Voraussetzungen) das Gesuchte abzuleiten oder zu folgern *).

Da es bei dem Studium der Mathematik vorzüglich darauf ankommt, sich in den Besitz einiger wenigen Elementarsätze gesetzt und dann sich befähigt zu haben, mittelst dieser Elementarsätze beliebige Untersuchungen selbstthätig anstellen und durchführen zu können, so sind auch hier die Sätze von den Körpern nicht in zu großer Zahl hingestellt worden und nur vorzüglich diejenigen, welche in den Anwendungen am häufigsten vorkommen. — In der beschreibenden Geometrie dagegen ist vorzüglich die Anwendung auf das Schiften und den Steinschnitt berücksichtigt worden, weshalb solche vollständiger ausgefallen ist, als es die vorhergegangene Theorie verantworten kann, in so fern auch krumme Flächen und Linien betrachtet worden sind. — Die Perspektive ist ziemlich vollständig behandelt, jedoch nur in der Absicht, dem praktischen Zeichner die Mittel in die Hand zu geben, seine Zeichnungen nach Gründen behandeln und rein praktische Vorlesungen über Perspektive nach denselben Gründen beurtheilen und leichter verfolgen zu können.

---

*) Diese drei Punkte bei dem Lesen einer jeden mathematischen Schrift immer vor Augen zu haben, und dabei so viel wie möglich selber mit zu arbeiten, ist dem Anfänger überhaupt sehr zu empfehlen.

Die beschreibende Geometrie, die Projektion der Schatten und die Perspektive sind unter dem gemeinschaftlichen Namen der körperlich-geometrischen Zeichenkunst, von der Theorie der Projektionen und überhaupt von dem eigentlich und rein mathematischen Theile abgesondert worden, in so fern sie nur als Anwendungen des letztern erscheinen können. Diese geometrische Zeichenkunst ist zugleicher Zeit auch dasjenige, was bei dem Unterrichte auf Gymnasien und sonstigen gelehrten Schulen, weggelassen werden müßte.

An Gymnasien würde der Vfr. vorzüglich das erste Kapitel tüchtig einstudiren lassen (versteht sich in Prima, denn in den vorhergehenden Klassen muß fortwährend ebene Geometrie (mit Inbegriff der ebenen Trigonometrie) getrieben werden, — außer den calculativen Theilen der Mathematik, — weil dadurch erst der Schüler zum Selbstdenken und Selbsterfinden sich erkräftigen muß). Und eben so wenig dürfte man das achte und neunte Kapitel als Vorboten einer gründlichen analytischen Stereometrie, für den wissenschaftlichen Unterricht vernachlässigen.

In den Citaten bedeutet A. — Arithmetik (im I. Bande), und E. G. — ebene Geometrie (im II. Bande); und die Paragraphen dieses III. Bandes sind ohne allen Beisatz citirt.

Berlin, im März 1826.

Dr. M. Ohm.

Vorrede zur zweiten Auflage.

In dieser neuen Auflage hat vorzüglich das erste, für die gesammte Körperlehre so wichtige Kapitel eine Umarbeitung erfahren, damit die Sätze noch naturgemäßer und für den Vortrag zweckmäßiger auf einander folgen möchten. Natürlich mußten dadurch auch mehrere Beweise umgeändert werden. — Ausserdem hat die sphärische Trigonometrie einige bedeutendere Veränderungen erfahren, um größere Vollständigkeit mit größerer Einfachheit gepaart zu sehen. Im Uebrigen ist nur hie und da Wesentliches geändert, alles aber sehr sorgfältig durchgesehen worden, und der Vfr. glaubt daher hoffen zu dürfen, daß alle etwanigen Druck- oder Redaktions-Fehler der erstern Auflage beseitigt seyn werden. — Ueber den correktesten Druck der neuen Auflage ist mit besonderer Sorgfalt gewacht worden.

Wer sich mit Koordinaten-Theorie und mit den Kegelschnitten mehr befreunden will, dem empfehlen wir die unter dem Titel: „die analytische Geometrie in ihren Elementen. Berlin 1827." erschienene Fortsetzung dieser Elementar-Mathematik. — Ueber den Geist des Ganzen

aber findet man nähere Belehrung in der als Einleitung zu der Elementar-Mathematik erschienenen „Anweisung 11—14 jährige Knaben ꝛc. ꝛc. zu einem leichten und wissenschaftlichen Studium der Mathematik fähig zu machen. Berlin 1827."

Berlin, im Sommer 1838.

M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß.

Körperliche Geometrie.

Erstes Kapitel. Von der Lage der Linien und Ebenen gegen einander (§§. 1.—63.).
Zweites Kapitel. Von den körperlichen Vielecken. Von den körperlichen Dreiecken in's Besondere (§§. 64.—83.).
Drittes Kapitel. Von den völlig begrenzten Körpern. In's Besondere von den Pyramiden, Prismen, Kegeln und Cylindern (§§. 84.—120.).
Viertes Kapitel. Von der Kugel und von den regulären Körpern (§§. 121.—140.).
Fünftes Kapitel. Von der Inhalts-Bestimmung der Oberflächen der Körper und der Körper selbst (§§. 141.—187.).
Sechstes Kapitel. Stereometrisch algebraische Aufgaben (§§. 188.—195.).
Siebentes Kapitel. Körperliche oder sphärische Trigonometrie (§§. 196.—217.).
Achtes Kapitel. Die Elemente der Projektions-Lehre (§§. 218.—235.).
Neuntes Kapitel. Etwas vollständigere Koordinaten-Theorie (§§. 236.—255.).

Körperlich-geometrische Zeichenkunst.

Erste Abtheilung.

Beschreibende Geometrie.

Einleitung (§§. 256.—265.).
Erstes Kapitel. Konstruktion gerader Linien und Ebenen im Raume. (§§. 266.—304.).
Zweites Kapitel. Konstruktion krummer Durchschnitts-Linien (§§. 305.—327.).

Drittes Kapitel. Konstruktion der Berührungs-Flächen, Berührungs-Linien und Normalen an gegebene krumme Flächen und deren Durchschnitts-Linien (§§. 328.—358.).

Körperlich-geometrische Zeichenkunst.

Zweite Abtheilung.

Konstruktion der Schatten.

Konstruktion der Schatten (§§. 359.—377.).

Körperlich-geometrische Zeichenkunst.

Dritte Abtheilung.

Perspektive.

Einleitung. Allgemeine Definitionen und allgemeine Lösung des Haupt-Problems (§§. 378.—383.).

Erstes Kapitel. Von der perspektivischen Zeichnung von Figuren, welche in der Grund-Ebene oder doch in horizontalen Objektiv-Ebenen liegen (§§. 384.—405.).

Zweites Kapitel. Von der perspektivischen Zeichnung solcher Figuren, welche nicht in horizontalen Ebenen liegen (§§. 406.—417.).

Drittes Kapitel. Von der Militär- oder Vogelperspektive und der Cavalierperspektive. Von dem perspektivischen Schatten; und von der Perspektive des Wiederscheins und der Abspiegelung (§§. 418.—426.).

Körperliche Geometrie.

Körperliche Geometrie.

Erstes Kapitel.

Von der Lage der Linien und der Ebenen gegen einander *).

Vorerinnerung.

Der in diesem Kapitel befolgte Gang findet sich in nachstehendem Schema übersichtlich gemacht. Es wird nämlich nach und nach betrachtet:

I. Die Möglichkeit der geraden Linien und Ebenen.

II. Die Lage der geraden Linien gegen Ebenen, und zwar
   a) wenn die Ebenen von den Geraden geschnitten werden, und
      α) auf einander senkrecht, oder
      β) auf einander schief stehen;
   b) wenn die Geraden und die Ebenen mit einander parallel laufen.

III. Die Lage der Ebenen gegen einander und zwar

*) Der größern Anschaulichkeit wegen bedeuten in diesem Kapitel, da wo keine Figur angegeben ist, große lateinische Buchstaben allemal Ebenen, kleine lateinische Buchstaben allemal Linien und kleine griechische Buchstaben allemal Punkte.

a) wenn sie sich schneiden und
   α) auf einander senkrecht oder
   β) auf einander schief stehen;
b) wenn sie mit einander parallel laufen.

IV. Die Möglichkeit der einfachsten geschlossenen Körper-Figuren, nämlich der Pyramiden und Prismen.

§. 1. Sätze

welche schon in der (Einleitung zur) ebenen Geometrie festgestellt worden sind.

Eine Ebene ist gegeben (ihrer Lage nach):

1) durch drei nicht in einer und derselben Richtung liegende Punkte (E. G. §. 2. N. 2.),
2) also auch durch zwei sich schneidende Richtungen (unendliche gerade Linien),
3) durch eine Richtung (unendliche gerade Linie) und einen Punkt außer ihr (E. G. §. 2.), endlich
4) durch zwei parallele Richtungen (E. G. §. 20.) (weil Parallellinien nur solche genannt werden, die in einer Ebene liegen und sich nie schneiden);

und in allen diesen Fällen giebt es jedesmal nur eine Ebene, welche durch die gegebenen Punkte oder Linien durchgeht.

5) Eine Gerade a liegt ganz und mit allen ihren Punkten in der Ebene A, sobald zwei ihrer Punkte in der Ebene A liegen. — Man sagt dann: „die Ebene „A gehe durch die Gerade a."

Anmerkung. Hieraus folgt:

1) Vier Punkte liegen nicht nothwendig in einer und derselben Ebene, und während drei davon nothwendig eine Ebene bilden, sobald sie nicht in einer und derselben Richtung liegen, muß von dem 4ten Punkte erst angenommen oder bewiesen werden, daß er in derselben Ebene liege.

2) Eben so wenig darf man annehmen, daß zwei gerade Linien (Richtungen), die sich nicht schneiden, in einer und derselben

Ebene liegen müssen. Im Gegentheil, zwei gerade Linien liegen entweder in einer und derselben Ebene oder nicht. Liegen sie in derselben Ebene, so laufen sie entweder mit einander parallel oder sie schneiden sich. Liegen sie aber nicht in derselben Ebene, so laufen sie nicht mit einander parallel und schneiden sich auch nicht.

3) Eine Gerade a, die nicht ganz in der Ebene A liegt, wird mit der Ebene A nur einen einzigen Punkt gemein haben können, oder gar nichts, obgleich beide ohne Ende gedacht sind.

§. 2. Zusätze.

1) Auf eine Linie a ist von einem Punkte α außer ihr beliebig im Raume genommen, jedesmal nur eine senkrechte Linie möglich.

Denn durch a und α geht nur eine Ebene, und in dieser Ebene ist von α auf a nur eine senkrechte Linie möglich (E. G. §. 27. N. 5.).

2) Mit einer Linie a ist durch einen Punkt β im Raume nur eine einzige parallele Linie b zu legen.

Denn durch a und β geht nur eine Ebene und in dieser durch β nur eine Parallele mit a (E. G. §. 28. N. 6.).

3) Auf eine Linie a sind von einem Punkte β in ihr, jedesmal unendlich viele senkrechte Linien zu errichten.

Denn durch jeden beliebigen Punkt im Raume und durch die Linie a geht allemal eine Ebene; also sind unendlich viele Ebenen möglich, die alle die Linie a gemeinschaftlich haben, und in jeder dieser Ebenen läßt sich von β aus auf a eine senkrechte Linie legen (E. G. §. 19. N. 2. und Note.).

Note. Später (im §. 4.) wird gezeigt werden können, daß alle diese senkrechten Linien in einer und derselben, auf der Linie a senkrechten Ebene liegen müssen.

§. 3. Lehrsatz und Erklärung.

Wird eine Ebene MN (Fig. 1.) von einer geraden Linie AB in dem Punkte B so getroffen, daß sie mit zweien in dieser

Ebene MN durch denselben Punkt B gezogenen Linien BC und BD rechte Winkel bildet, so bildet sie mit jeder andern durch B in derselben Ebene MN gezogenen Linie z. B. mit BE, ebenfalls einen rechten Winkel. — Und man sagt dann: „die Linie AB und die Ebene MN stehen auf einander *senkrecht*"; im Gegentheil aber stehen sie *schief* auf einander *).

Beweis. Man verlängere BC, BE, BD nach F, H und G, mache BC = BF und BD = BG, ziehe CD und FG, welche die HE in den Punkten H und E schneiden; ziehe zuletzt AF, AH, AG, AC, AE, AD, so ist

1) $\triangle FBG \cong \triangle CBD$,

weil zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind; und daraus folgt

2) W. BDE = W. BGH.

Dann ist wiederum

3) $\triangle BDE \cong \triangle BGH$,

weil eine Seite und zwei anliegende Winkel in beiden dieselben sind. Daraus folgt 4) BE = BH und DE = GH.

Ferner sind die bei B rechtwinklichen Dreiecke

5) ABF und ABC

desgleichen 6) ABG und ABD congruent; folglich auch 7) AC = AF und AD = AG;

und dann ist noch 8) $\triangle ADC \cong \triangle AGF$,

weil alle drei Seiten gleich sind; folglich auch

9) W. AGH = W. ADE.

Und deshalb wiederum

10) $\triangle AGH \cong \triangle ADE$,

weil zwei Seiten (nach NN. 4. und 7.) und der eingeschlossene Winkel (nach N. 9.) in beiden dieselben sind. Aber dann ist auch

11) AE = AH

und 12) $\triangle ABE \cong \triangle ABH$,

weil alle drei Seiten gleich sind (nach NN. 11. und 4.). Und aus dieser letzten Congruenz folgt auch die Gleichheit der beiden Nebenwinkel ABE und ABH, von denen daher jeder ein rechter seyn muß.

---

*) Der größern Anschaulichkeit wegen, sind die Linien, welche ganz in der Ebene MN liegen, ausgezeichnet, die übrigen, außerhalb der Ebene MN liegenden nur punktirt worden.

Note. Selbstlernende werden hier aufmerksam gemacht, daß die letzte Congruenz (N. 12.) der Endzweck des ganzen Beweises ist. Diese Congruenz kann man aber nicht eher beweisen, als bis die Congruenzen (N. 10.) und (N. 3.) eingeräumt sind, von denen jede wiederum nicht eher für nothwendig erkannt wird, als bis die vorhergehenden Congruenzen dargethan sind, u. s. w. f. — Geht man so analytisch zu Werke, so findet sich der synthetische Beweis, wie er hier vorsteht.

Später (im §. 16.) wird man einsehen, daß eine Linie **AB** auf einer Linie **BC** in einer Ebene **MN** senkrecht stehen kann, ohne deshalb noch auf einer zweiten durch **B** in **MN** gezogenen Linie senkrecht zu stehen, also auch ohne auf der Ebene senkrecht zu stehen.

§. 4. Zusatz.

Umgekehrt, steht eine Linie AB (Fig. 1.) auf mehreren Linien **BC, BD, BE, ꝛc. ꝛc.** zugleich senkrecht, so liegen diese Linien **BC, BD, BE, ꝛc. ꝛc.** alle in einer und derselben Ebene.

Denn zwei derselben z. B. **BC** und **BD** bilden eine Ebene **BCD**. Mag nun irgend eine 3te der Linien z. B. **BE** in derselben Ebene liegen oder nicht, so wird sie doch mit **BA** eine Ebene **ABE** bilden, welche entweder an sich oder doch in ihrer Verlängerung die Ebene **BCD** in einer Linie **BX** schneiden müßte. Und weil nun **AB** auf **BC** und **BD** senkrecht steht, so muß **AB** auch auf **BX** senkrecht stehen (nach §. 3.). Es wird also, während **BA, BE** und **BX** in derselben Ebene **ABE** liegen, W. **ABE**=W. **ABX**=**R**=$\frac{1}{2}\pi$ seyn, folglich **BE** mit **BX** nothwendig zusammenfallen müssen. Also wird auch **BE** mit **BC** und **BD** in derselben Ebene **BCD** liegen.

§. 5. Zusatz.

Durch einen Punkt **B** einer geraden Linie **AB** kann man nur eine Ebene legen, senkrecht auf **AB** (Fig. 1.).

Denn ließe sich durch **B** außer **BCD** noch eine zweite Ebene legen senkrecht auf **AB**, so würde sich durch **AB** eine Ebene denken lassen, welche die eine senkrechte Ebene **BCD** in **BE**, die andere senkrechte dagegen in einer Linie **BX** schnitte, und dann müßte W. **ABE** und auch W. **ABX** ein rechter Winkel seyn, welches deshalb nicht möglich ist, weil die Schenkel **BA, BE** und **BX** in einer und derselben Ebene liegen, folglich einer der Winkel nothwendig ein Theil des andern ist.

§. 6. Zusatz.

Von einem Punkte A außerhalb einer Ebene MN (Fig. 2.) läßt sich auf die Ebene MN nur eine einzige senkrechte Linie fällen.

Denn wären AB und AC zwei solche auf MN senkrechte Linien, so wäre, wenn man BC zieht, ABC ein Dreieck, welches zwei Winkel hätte, von denen jeder ein rechter Winkel wäre.

Anmerkung. Die senkrechte Linie AB ist kürzer wie jede andere Linie AC, von A nach der Ebene MN gezogen.

§. 7. Zusatz.

Von einem Punkte B in einer Ebene MN läßt sich auf diese Ebene nur eine senkrechte Linie BA errichten (Fig. 2.).

Denn jede andere Linie BZ, welche von B aus noch gedacht werden kann, wird mit BA eine Ebene ABZ bilden, und diese Ebene (an sich schon oder verlängert) wird die Ebene MN in einer Linie BD schneiden. Dann sind BA, BZ, BD in einer und derselben Ebene, folglich W. ZBD < W. ABD d. h. W. ZBD < R oder $< \frac{1}{2}\pi$. Jede andere Linie BZ kann also auf MN nicht mehr senkrecht stehen, sobald BA schon senkrecht auf ihr steht.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien AB und CD mit einander parallel laufen und die eine davon AB auf einer Ebene MN senkrecht steht, so steht auch nothwendig die andere Linie CD auf derselben Ebene MN senkrecht (Fig. 3.).

Beweis. Man beweise, daß CD auf zweien Linien DB und DE in der Ebene MN senkrecht steht (§. 3.). — Es liegen aber AB und CD in einer Ebene, weil sie mit einander parallel laufen; und diese Ebene ABCD schneidet die MN in der geraden Linie BD, und dabei ist ABD = R, also auch CDB = R. Es steht also CD auf DB senkrecht.

Um nun den andern Theil des Beweises durchzuführen, denke man sich in der Ebene MN die DE senkrecht auf BD, und DE = BA gemacht, so wie BE und AE und AD gezogen; so ist

1) $\triangle ABD \cong \triangle EDB$,

weil beide rechtwinklich sind und bezüglich gleiche Katheten haben. Daher auch

2) AD = BE.

Dann aber ist wiederum

3) △ ABE ≅ △ EDA,

weil alle drei Seiten bezüglich einander gleich sind. Und daraus folgt

4) W. ABE = W. EDA.

Aber es ist AB senkrecht auf der Ebene MN, also W. ABE ein rechter, folglich auch W. EDA ein rechter Winkel. — Es steht also ED senkrecht auf den beiden Linien DB und DA, also auf der ganzen Ebene ABDC, mithin auch auf der Linie CD; also ist W. EDC = R, d. h. auch CD senkrecht auf DE.

Also steht CD senkrecht auf DB und auch auf DE, folglich senkrecht auf der ganzen Ebene BDE oder MN (nach §. 3.).

§. 9. Zusatz.

Umgekehrt, stehen AB und CD (Fig. 3.) beide senkrecht auf der Ebene MN, so liegen beide in einer und derselben Ebene, und laufen mit einander parallel.

Denn construirt man wieder die Punkte E, A (wie §. 8.), so hat man jetzt wiederum die Congruenz derselben Dreiecke, dahero folgt wiederum, daß ED auf DA senkrecht stehen müsse. Es steht also wiederum ED senkrecht auf DB und DA, also senkrecht auf der Ebene BDA (nur daß man jetzt noch nicht weiß, daß DC in derselben Ebene BDA liegt). Weil aber, nach der Voraussetzung dasmal auch CD senkrecht auf der Ebene MN seyn soll, so hat man W. EDC = R; also muß (nach §. 4.) die Linie DC mit BDA, also auch mit BA in derselben Ebene liegen.

Liegen aber AB und CD in derselben Ebene, so sind sie auch mit einander parallel, weil sie, nach der Voraussetzung, beide auf DB senkrecht stehen *).

Anmerkung. Derselbe Satz kann auch leicht rein indirekt aus dem vorhergehenden (§. 8.) erwiesen werden.

*) Daß zwei Linien a und b auf einer dritten c senkrecht stehen können, ohne deshalb mit einander parallel zu seyn, fällt wohl jedem Anfänger von selbst in die Augen, sobald man sich die Linien a und b nicht in einer und derselben Ebene liegend denkt.

§. 10. Lehrsatz.

Sind zwei gerade Linien BE und CF (Fig. 8.) mit einer dritten AD, die beliebig wo im Raume liegt, parallel, so sind dieselben unter sich parallel.

Denn man bilde sich eine Ebene EDF, welche auf der dritten Geraden AD senkrecht steht und die beiden andern Geraden BE und CF (in E und F) trifft. Diese Ebene ersteht aber, wenn man in jeder der beiden Ebenen EDAB und FDAC von einem beliebigen Punkte D der dritten Geraden AD aus, bezüglich die geraden Linien DE und DF auf AD senkrecht zieht. Dann steht AD senkrecht auf der Ebene EDF (nach §. 3.); folglich stehen auch die mit ihr parallelen BE und CF auf derselben Ebene EDF senkrecht (nach §. 8.); und deshalb sind sie auch (nach §. 9.) nothwendig unter sich parallel.

§. 11. Lehrsatz.

Zwei Winkel BAC und EDF (Fig. 8.), welche beliebig im Raume liegen, aber bezüglich von den parallelen Schenkeln AB, DE und AC, DF gebildet werden, sind allemal einander gleich (wenn sie nicht einander zu zwei rechten Winkeln ergänzen).

Denn macht man AB = DE, AC = DF, und zieht man dann die Geraden BC, EF, BE, AD und CF, so ist zunächst AB mit DE, folglich auch AD mit BE gleich und parallel. Ferner ist AC mit DF, folglich auch AD mit CF gleich und parallel. Aber eben deshalb ist nun auch (nach §. 10.) BE mit CF gleich und parallel; so daß zuletzt auch noch BC mit EF gleich und parallel seyn muß. — Dann aber sind die Dreiecke ABC und DEF congruent, weil ihre drei Seiten bezüglich einander gleich sind; und daraus folgt endlich die Gleichheit der Winkel BAC und EDF.

§. 12. Erklärung.

So oft eine Gerade AB (Fig. 2.) einer Ebene MN in einem Punkte B begegnet, ohne auf letzterer senkrecht zu stehen, so oft läßt sich von jedem beliebigen ihrer Punkte, z. B. von A aus, auf dieselbe Ebene MN eine senkrechte Gerade AC herabfällen. Zieht man dann die BC, so heißt der Winkel ABC der Neigungs-Winkel der Geraden AB gegen die Ebene MN.

§. 13. Zusätze.

Hieraus folgt sogleich:

1) Der Neigungs-Winkel bleibt derselbe, wenn man auch statt des Punktes A einen andern Punkt A′ in AB nimmt, von diesem aus auf die Ebene MN die Senkrechte A′C′ fällt, und nun den Winkel A′BC′ zum Neigungs-Winkel nimmt.

Denn da AC und A′C′ beide auf MN senkrecht gedacht sind, so sind sie unter sich parallel. Sie liegen also beide in derselben Ebene ABC; folglich liegt C′ in der Richtung BC.

2) Zwei schiefe Linien AB und AC (Fig. 17.), welche mit der Ebene MN gleiche Neigungs-Winkel ACE, ABE machen (wo AE die Senkrechte auf die Ebene vorstellt) sind einander gleich, und ihre Fuß-Punkte C und B stehen dann auch von dem Fuß-Punkte E der Senkrechten AE gleich weit ab.

Denn es sind die rechtwinklichen Dreiecke AEC und AEB einander congruent.

3) Derselbe Satz gilt auch umgekehrt; d. h. sind AC und AB einander gleich, so haben sie auch gegen die Ebene MN einerlei Neigung.

Und sind die Entfernungen der Fuß-Punkte, nämlich CE und BE einander gleich, so sind auch die Linien AC und AB einander gleich und haben auch gleiche Neigung gegen die Ebene MN.

4) Ist AC > AB, so ist auch CE > BE, aber W. ACE < W. ABE.

5) Ist W. ACE < W. ABE, so ist AC > AB und CE > BE.

6) Ist CE > BE, so ist auch AC > AB, aber W. ACE < W. ABE.

§. 14. Lehrsatz.

Zwei parallele Linien AB und CD (Fig. 18.) haben gegen

eine Ebene MN gleiche Neigungs-Winkel und die zweiten Schenkel dieser Neigungs-Winkel laufen auch mit einander parallel.

Denn man fälle AE senkrecht auf die Ebene MN, ziehe BE, so daß ABE der eine Neigungswinkel (von AB gegen MN) ist, und mache dann DF mit BE parallel und gleich, mache auch DC=BA und ziehe die CF, so wie noch die AC, BD und EF. Dann sind wieder (wie im §. 11.) die AC und EF mit BD, also auch erstere beiden unter sich gleich und parallel; folglich ist auch CF mit AE gleich und parallel. Also steht auch (nach §. 8.) die CF senkrecht auf der Ebene MN, und CDF ist demnach der 2te Neigungs-Winkel, der dem erstern ABE deshalb gleich ist, weil sie beide zu congruenten Dreiecken gehören.

Die Dreiecke sind aber deshalb congruent, weil sie drei gleiche Seiten haben.

Note. Sind jedoch zwei Gerade AB und CF gegen eine Ebene MN gleich geneigt, so sind sie deshalb nicht nothwendig mit einander parallel.

§. 15. Zusatz.

Umgekehrt aber sind zwei Gerade AB und CD gegen die Ebene gleich geneigt; sind AE und CF die Senkrechten auf die Ebene MN, und sind noch BE und DF mit einander parallel, so sind auch die Linien AB und CD unter sich parallel.

Denn wäre nicht CD (Fig. 18.) parallel mit AB, so könnte man durch C mit AB eine Parallele CD' legen, welche der Ebene MN in D' begegnete. Dann wäre aber nach dem nächst vorhergehenden Satze D'F mit der BE, also auch mit der DF parallel; welches ein Widerspruch ist.

§. 16. Lehrsatz.

Steht eine Gerade AB schief auf einer Ebene MN (Fig. 15.), so giebt es doch immer eine Gerade HBH' in der Ebene MN, aber auch nur eine einzige, auf welcher dieselbe AB senkrecht steht. Und diese Gerade HBH', mit welcher AB immer rechte Winkel bildet, wird gefunden, wenn man den Neigungs-Winkel ABC der, gegen die Ebene MN schief stehenden Geraden

AB construirt, dann aber HBH' auf dem Schenkel BC dieses Neigungs-Winkels senkrecht sich denkt.

Denn zieht man KCK' durch C parallel mit HBH', so steht solche zugleich senkrecht auf BC und auf CA, folglich auch auf der Ebene ABC (nach §. 3.). Aber dann steht auch die mit KCK' parallele HBH' auf derselben Ebene ABC senkrecht (nach §. 8.); folglich ist auch HBA ein rechter Winkel.

Stände aber AB nicht bloß auf dieser einen Geraden HBH' senkrecht, sondern auch noch auf einer zweiten Geraden in MN, so würde solche (nach §. 3.) auch auf der ganzen Ebene MN senkrecht stehen; was gegen die Voraussetzung ist.

§. 17. Lehrsatz.

Der Neigungs-Winkel ABC einer Geraden AB gegen eine Ebene MN ist der kleinste Winkel unter allen denen, welche diese Gerade AB mit beliebigen in der Ebene MN durch B gelegten Linien bildet (Fig. 20.).

Beweis. Denn man ziehe eine beliebige Linie BE und beweise, daß ABE > ABC. — Zu dem Ende mache man BE = BC, ziehe AE und CE, so ist AE > AC, weil AE die Hypothenuse, AC die Kathete des bei C rechtwinklichen Dreiecks AEC ist. In den beiden Dreiecken ABE und ABC sind nun zwei Paar Seiten bezüglich einander gleich, nämlich AB = AB, BC = BE, die dritte Seite AC aber kleiner wie die dritte Seite AE in dem andern. Folglich auch der Winkel ABC < als der Winkel ABE.

Man kann auch den Beweis dadurch führen, daß man CE auf BE senkrecht zieht. Dann ist AE eine gegen die Ebene MN schief stehende Gerade, und AEC ihr Neigungs-Winkel gegen diese Ebene. Folglich bildet sie mit der auf CE senkrechten BE (nach §. 16.) einen rechten Winkel. Die beiden rechtwinklichen Dreiecke ACB und AEB haben dann die Hypothenuse gemeinschaftlich und AC < AE; folglich ist auch W. ABC < W. ABE.

Anmerkung. In diesem und in dem folgendem Paragraphen (so wie schon im §. 13.) kommen folgende Sätze der ebenen Geometrie in Anwendung:

1) Wenn in zwei ebenen Dreiecken ABC und abc zwei Seiten bezüglich einander gleich sind, AB = ab, AC = ac, die dritte Seite in dem erstern aber größer wie die dritte Seite in

in dem andern, d. h. BC > bc ist, so ist auch der W. A > W. a. — Derselbe Satz umgekehrt: wenn AB = ab, AC = ac, A > a ist, so ist auch BC > bc.

2) Wenn in zwei bei B und b rechtwinklichen Dreiecken ABC und abc, BC = bc, aber AB > ab, so ist auch AC > ac. — Derselbe Satz auch umgekehrt: ist nämlich BC = bc, aber AC > ac, so muß auch AB > ab und W. A < W. a, also auch W. C > W. c seyn.

3) Wenn in zwei bei B und b rechtwinklichen Dreiecken ABC und abc, AC = ac dagegen W. A > W. a ist, so ist auch W. C < W. c, und AB < ab dagegen BC > bc. — Und umgekehrt: ist AC = ac, AB < ab, so ist auch BC > bc und auch W. A > W. a und W. C < W. c.

Note. Der Anfänger wird wohl thun, die Beweise dieser Sätze noch einmal vorzunehmen, oder selbst dergleichen Beweise zu finden, was hier jedesmal in Bezug auf (NN. 2. und 3.) sehr leicht ist, sobald die Dreiecke mit den rechten Winkeln auf einander, oder mit der Hypothenuse neben einander gelegt gedacht werden.

§. 18. Zusätze.

Es steht AB in B schief auf der Ebene MN (Fig. 21.) und AC senkrecht auf MN, so daß ABC die Ebene des Neigungs-Winkels ist.

1) Wird nun BC um B herumbewegt gedacht in der Ebene MN, so daß sie nach und nach mit den verschiedenen Richtungen BD, BE, BO, BF, BL, BH und zuletzt mit der verlängerten BC, nämlich mit BG zusammenfällt, so werden die Winkel ABD, ABE, ABO, ABF, ABL, ABH, mit CBD, CBE, CBO, CBF, CBL, CBH zugleich größer, bis zuletzt ABG der größeste wird, so wie ABC der kleinste Winkel ist.

Denn es ist, wenn man aus B als Mittel-Punkt mit BC als Radius einen Kreis beschreibt, so daß BC = BD = BE = &c. gemacht worden, die Sehne CD < als die Sehne CE also, in den rechtwinklichen Dreiecken CDA, CEA auch AD < AE; und daher auch W. ABD < W. ABE, weil in den

Dreiecken ABD, ABE zwei Seiten dieselben sind, die dritte Seite aber von der dritten verschieden ist.

2) Eine auf MN schiefe Linie AB bildet also mit dreien in MN durch B gezogenen Linien nie drei gleiche Winkel. — Und bildet daher eine Linie AB mit dreien durch B in MN gezogenen Linien drei gleiche Winkel, so muß AB auf MN senkrecht stehen.

3) Weil aber (nach §. 6.) BF senkrecht auf BA steht, sobald FBC ein rechter Winkel ist, so sind die Winkel ABO und CBO zugleich spitz, und ABH und CBH zugleich stumpf, wie auch BO und BH außerdem gezogen seyn mögen.

4) Ist daher ABF ein rechter Winkel, so ist auch CBF ein rechter (indirekt).

5) Steht BF senkrecht auf BC und ist W. ABH + W. ABE = 2R, so ist W. HBF = W. EBF und W. CBH + W. CBE = 2R.

Denn verlängert man HB nach K, so ist nach der Voraussetzung W. ABE = W. ABK, also wenn AK und AE senkrecht auf BK und BE gezogen werden, $\triangle$ ABK $\cong$ $\triangle$ ABE und BK = BE. Und weil dann auch CK und CE auf BK und BE senkrecht stehen (nach N. 4.), so ist wiederum $\triangle$ BCK $\cong$ $\triangle$ BCE, also W. CBK = W. CBE, daher auch W. HBF = W. EBF.

6) Umgekehrt, ist W. CBH + W. CBE = 2R, so ist auch W. ABH + W. ABE = 2R. — Wird eben so bewiesen, wie (N. 5.), nur in umgekehrter Ordnung.

7) Ist W. ABH + W. ABE $\gtrless$ 2R, so ist auch W. CBH + W. CBE $\lessgtr$ 2R.

Denn es ist dann W. ABE $\gtrless$ W. ABK, also AE $\gtrless$ AK, und dann auch in den $\triangle\triangle$ AKC und AEC, CE $\gtrless$ CK, BE $\lessgtr$ BK und W. CBE

$\gtrless$ W. CBK, also auch W. CBE $\gtrless$ W. GBH, und deshalb W. CBH + W. CBE $\gtrless$ 2R.

8) Umgekehrt, ist W. CBH + W. CBE $\gtrless$ 2R, so ist auch W. ABH + W. ABE $\gtrless$ 2R.

Es darf der vorstehende Beweis nur in umgekehrter Ordnung geführt werden. Auch würde sich dieser letztere Satz (N. 8.) geradezu indirekt (aus den Nummern 5.—7.) ableiten lassen.

§. 19. Erklärung.

Man sagt: „eine Gerade schneide eine Ebene" (in einem Punkte), wenn sie mit der Ebene einen einzigen Punkt nur gemein hat; und wir haben gesehen, daß sie dann auf der Ebene senkrecht, oder schief steht, d. h. daß sie entweder mit allen Geraden in der Ebene rechte Winkel bildet, oder nur mit einer einzigen derselben.

Man sagt aber: „eine Gerade laufe mit einer Ebene parallel", wenn sie beide keinen einzigen Punkt mit einander gemein haben, obgleich die Gerade und die Ebene ohne Ende (unbegrenzt) gedacht werden.

§. 20. Zusatz.

Eine Gerade a ist mit einer Ebene B, in der sie nicht liegt, parallel, so oft sie mit einer in B liegenden Geraden b parallel ist.

Denn die Linien a und b bilden die Ebene (Eb. a b) *), welche mit der Ebene B die Linie b gemein hat. Da nun, im Falle a mit B nicht parallel wäre, die Linie a die Ebene B in einem Punkte treffen müßte, zu gleicher

*) Durch (Eb. p, q) bezeichnen wir hier immer die durch die Linien p und q gebildete Ebene, es mögen diese Linien p und q mit einander parallel laufen oder sich schneiden.

Zeit aber nicht aus ihrer Ebene (Eb. a, b) heraus treten könnte, so müßte dieser Punkt in der Ebene (Eb. a, b) und in B zugleich liegen, also in der Linie b; demnach würden die Linien a und b einen Punkt gemein haben, d. h. in diesem Punkte sich schneiden, folglich nicht mit einander parallel seyn.

Note. Ist aber eine Linie a mit einer Ebene B parallel, so ist sie deshalb nicht mit jeder beliebigen Linie in B parallel.

§. 21. Zusatz.

Ist eine Gerade a mit einer Ebene B parallel, und legt man durch a und durch einen beliebigen Punkt β in B eine Ebene (Eb. a, β), welche die Ebene B in einer Linie b schneidet (Eb. G. §. 3.), so sind die Linien a und b nothwendig mit einander parallel; und die Gerade a ist dann auch mit jeder andern Geraden c in der Ebene B parallel, welche mit b parallel läuft.

Denn schnitten sich die Geraden a und b, so schnitten sich auch die Linie a und die Ebene B. Das Uebrige folgt aus §. 10.

§. 22. Zusatz.

Liegen zwei Gerade a und b ganz beliebig im Raume und nicht in einer und derselben Ebene, so läßt sich durch die eine b dieser Linien allemal eine Ebene legen parallel mit der andern Linie a, jedoch nur eine einzige.

Denn man nehme in b einen beliebigen Punkt β, und denke sich durch β eine Linie c parallel mit a, so ist (nach §. 21.) die Ebene (Eb. b, c) mit der Linie a parallel, weil die Linie c in ihr mit a parallel ist. — Jede andere durch b gelegte Ebene würde aber von (Eb. a, β) oder (Eb. a, c) in einer Linie d geschnitten, welche die Linie c in β schnitte, also auch die mit c parallele a schneiden würde. Deshalb kann jede andere durch b gelegte Ebene nicht mehr mit a parallel seyn.

Anmerkung. Liegen dagegen zwei Linien a und b in einer und derselben Ebene, so schneiden sie sich entweder oder sie laufen mit einander parallel. Schneiden sie sich, so läßt sich durch b nicht eine Ebene legen, die mit a parallel seyn könnte.

Sind dagegen die Linien a und b parallel, so kann man durch b unendlich viele Ebenen legen, und jede derselben muß mit a parallel seyn.

§. 23. Zusatz.

Durch einen Punkt α außerhalb einer Ebene B, lassen sich unzählich viele mit der Ebene B parallele Linien legen.

Denn durch jeden in B angenommenen Punkt β kann man in B unendlich viele gerade Linien legen; und durch jede b dieser Linien und den gegebenen Punkt α eine Ebene, und in jeder dieser Ebenen durch α eine mit der Geraden b, also auch mit der Ebene B parallele Gerade.

Note. Später (§. 50.) wird sich zeigen lassen, daß alle diese durch α mit B parallel gelegten Geraden, in einer und derselben, mit B parallelen Ebene liegen.

§. 24. Erklärung.

Zwei Ebenen A und B werden sich entweder gar nicht treffen (auch wenn sie, wie dies immer vorausgesetzt wird, nach allen Seiten hin in's Unendliche sich erstrecken) und in diesem Falle werden sie (wenn solche existiren sollten) parallele Ebenen genannt. — Oder die Ebenen werden sich treffen, und dann haben sie eine unendliche Gerade mit einander gemein, und man sagt dann: „die Ebenen schneiden sich in dieser geraden Linie (L. A, B) *). — Jeder der vier, durch diese sich schneidenden Ebenen gebildeten unendlichen körperlichen Räume heißt Flächen-Winkel; die ihn begrenzenden Ebenen von der Durchschnittslinie (L. A, B) an gerechnet, heißen seine Schenkel, und die Durchschnittslinie (L. A, B) selbst, seine Scheitellinie oder Kante (Vgl. E. G. §. 5.).

---

*) Durch (L. P, Q) bezeichnen wir hier immer die Durchschnittslinie der Ebenen P und Q.

§. 25. Zusätze.

1) Einen Flächen-Winkel kann man mittelst Ebenen, welche durch seine Scheitellinie gehen, in beliebige neue Flächen-Winkel zertheilen.

2) Man kann sich daher auch einen jeden Flächen-Winkel als das nfache seines nten Theiles denken. Folglich ist jeder Flächen-Winkel, obgleich ein unendlicher Raum, doch eine endliche Größe (I. Bd. Einl. N. 3.).

3) Man kann daher auch von zwei gleichen und von größern und kleinern Flächen-Winkeln sprechen (I. Bd. S. 89. N. 25.).

4) Zwei congruente Flächen-Winkel sind allemal einander gleich; aber auch umgekehrt: zwei gleiche Flächen-Winkel sind auch allemal congruent.

§. 26. Lehrsatz und Erklärung.

Errichtet man aus beliebigen Punkten A und B (Fig. 9.) in der Kante MN eines Flächenwinkels PNR die auf die Kante MN senkrechten Linien AC, BE, in dem ebenen Schenkel NR, und AD, BF in dem andern ebenen Schenkel NP, so sind die dadurch entstehenden Winkel CAD und EBF einander gleich.

Denn sie werden von parallelen Schenkeln gebildet (§. 10.).

Jeden auf die so eben beschriebene Weise gebildeten Winkel CAD nennt man den Neigungswinkel der Ebenen NP und NR, besser noch, den, dem Flächenwinkel PNR correspondirenden Linienwinkel.

§. 27. Zusätze.

1) Der Neigungs-Winkel zweier Ebenen NP und NR (Fig. 9.) bleibt immer derselbe, man mag seinen Scheitel in der Kante annehmen wo man will (nach §. 26.).

2) Die Kante MN steht auf der Ebene CAD des Neigungswinkels allemal senkrecht (nach §. 3.).

§. 28. Zusatz.

Errichtet man aus einem Punkte H (Fig. 10[a]) und 10[b])) der Kante eines Flächen-Winkels QST gerade Linien JHL und VHW, die erste senkrecht auf die Ebene QS, die andere senkrecht auf die Ebene ST, so bilden diese Linien mit einander zwei Nebenwinkel JHV und JHW. — Der eine JHV ist allemal dem Neigungswinkel JHK gleich; der andere JHW dagegen, dessen beide Schenkel nach den äußern Seiten des Flächenwinkels zu gehen, macht mit dem Neigungswinkel zusammen zwei rechte Winkel aus (d. h. beide sind Supplement-Winkel).

Denn da die Kante US auf den vier Linien HG, HK, HV, HJ, senkrecht steht, so liegen diese vier Linien in einer und derselben Ebene (nach §. 4.). Ist nun GHK ein rechter Winkel, so fällt HV mit HK zusammen und HJ ist die Verlängerung von HG und der Satz fällt dann in die Augen. Ist aber der Winkel GHK ein spitzer, wie (Fig. 10[a])) oder ein stumpfer, wie (Fig. 10[b])), so ist W. JHV = W. GHK als Differenzen (Fig. 10[a])) oder als Summen (Fig. 10[b])) der gleichen rechten Winkel und des gemeinschaftlichen Winkels VHK.

§. 29. Lehrsatz.

Sind zwei Flächenwinkel PNR und QST (Fig. 11. und 12.) einander gleich (also auch congruent), so sind auch ihre Neigungswinkel (correspondirende Linienwinkel) CAD und GHK einander gleich (also auch congruent).

Beweis. Denn denkt man sich die Flächenwinkel mit ihren Scheitellinien MN und US, mit den Scheiteln A und H, desgleichen mit den ebenen Schenkeln NR und ST in einander gelegt, so werden, weil die Winkel NAC und SHG rechte sind, auch die Linien AC und HG sich decken, desgleichen die ebenen Schenkel NP und QS, weil die Flächenwinkel, nach der Voraussetzung, einander gleich sind; und dann decken sich auch die Linien AD und HK, weil die Winkel NAD und SHK rechte, also einander gleich sind; folglich decken sich die Linien-Winkel CAD und GHK und sind daher einander gleich.

§. 30. Zusatz.

Umgekehrt, sind die beiden Neigungs-Winkel CAD und GHK einander gleich, so sind auch die Flächen-Winkel PNR QST selbst einander gleich (Figg. 11. 12.).

Denn denkt man sich die Flächen-Winkel wieder so wie im §. 29. in einander gelegt, so werden sich abermals die Linien **CA** und **GH** decken; aber zugleich auch die Ebenen **CAD** und **GHK** auf einander fallen, weil sie beide auf **MN** senkrecht stehen; und dann fallen auch die zweiten Schenkel **AD** und **HK** auf einander, wegen der Gleichheit der Neigungs-Winkel, und deshalb decken sich die ebenen Schenkel **NAD** und **SHK**, d. h. **NP** und **SQ** ebenfalls. Folglich sind die Flächen-Winkel congruent (und auch gleich).

§. 31. Lehrsatz.

Zwei beliebige Flächen-Winkel **PNR** und **QST** verhalten sich zu einander, wie ihre Neigungs-Winkel **CAE** und **GHK** (Figg. 11. und 12.).

Beweis. Denn man denke sich die beiden Flächen-Winkel **PNR** und **QST** durch einen Einheits-Flächen-Winkel **Z** gemessen und es werde gefunden $PNR = m \cdot Z$, so wie $QST = n \cdot Z$. Zu dem Einheits-Flächen-Winkel **Z** werde der Neigungs-Winkel **W** gebildet, so wird sich, während man den Einheits-Flächen-Winkel **Z**, **m** mal an einander trägt, um den Winkel **PNR** zu haben, auch der Neigungs-Winkel **W**, **m** mal neben einander tragen, *immer in der, auf die Scheitellinie* **MN** *senkrechten Ebene*, und den Neigungs-Winkel $CAD = m \cdot W$, so wie noch $GHK = n \cdot W$ machen. Und es sind daher die Quotienten (Verhältnisse) der Flächen-Winkel zu einander, und ihrer Neigungs-Winkel zu einander, dieselben, nämlich jedesmal $= \frac{m}{n}$.

§. 32. Zusatz.

Mißt man also einen Flächen-Winkel A durch irgend einen Einheits-Flächen-Winkel Z, und den Neigungs-Winkel von A durch den Neigungs-Winkel von Z, so kommt jedesmal ein und dasselbe Maas (absolute ganze oder gebrochene Zahl).

Hieraus ergiebt sich der so wichtige praktische Satz, daß, wenn man Flächen-Winkel durch ihre Maaße in Rechnung bringen will, statt solcher eben so gut ihre Neigungs-Winkel genommen werden können.

Note. In dieser Beziehung kann man daher Flächen-Winkel mit ihren Neigungswinkeln ganz und völlig verwechseln.

§. 33. Erklärungen.

Ist der Neigungs-Winkel eines Flächen-Winkels ein erhabener, flacher (oder gestreckter), hohler, stumpfer, rechter oder endlich ein spitzer, so nennt man den Flächen-Winkel selbst einen erhabenen, flachen (oder gestreckten), hohlen, stumpfen, rechten oder endlich einen spitzen Flächen-Winkel.

Und ist der Flächen-Winkel ein rechter, so sagt man: die Ebenen (welche seine Schenkel bilden) stehen senkrecht auf einander; im entgegengesetzten Falle sagt man: dieselben Ebenen stehen schief auf einander.

Scheitel-Flächen-Winkel heißen diejenigen, welche eine gemeinschaftliche Kante haben, und von denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des andern sind.

Neben-Flächen-Winkel heißen solche, die zusammen den gestreckten ausmachen.

§. 34. Zusätze.

1) Scheitel-Flächen-Winkel sind einander gleich, weil ihre Neigungs-Winkel ebenfalls Scheitel-Winkel sind.

2) Der rechte Flächen-Winkel ist die Hälfte vom gestreckten; und alle gestreckten (geraden oder flachen) Flächen-Winkel, auch alle rechten Flächen-Winkel sind einander gleich; alles weil dies mit den Neigungs-Winkeln so der Fall ist.

3) Durch eine Linie b in einer Ebene B läßt sich nur eine einzige auf B senkrechte Ebene legen.

§. 35. Lehrsatz.

Eine Ebene PQ steht senkrecht auf einer andern Ebene MN, wenn eine Linie AB in ihr auf der Ebene MN senkrecht steht (Fig. 13.).

Beweis. Denn, um den Neigungs-Winkel zu construiren, errichte man von B aus auf die Kante QR die senkrechte BC in der Ebene MN, so ist ABC der Neigungs-Winkel, weil AB ebenfalls auf der Kante QR senkrecht steht; und dieser Neigungs-Winkel ABC ist ein rechter, weil AB auf der Ebene MN, also auch auf BC senkrecht steht.

Anmerkung. Daher stehen die Schenkel eines Flächen-Winkels auf der Ebene seines Neigungs-Winkels senkrecht, weil die in ihnen liegende Kante auf letzterer Ebene senkrecht steht.

§. 36. Zusätze.

1) Umgekehrt, errichtet man aus einem Punkte (Fig. 13.) B oder A einer Ebene PQ, welche auf einer andern Ebene MN senkrecht steht, in der erstern Ebene eine Linie AB senkrecht auf die Kante QR, so steht diese Linie AB auch senkrecht auf der ganzen Ebene MN.

Denn von B aus giebt es auf die Ebene MN nur eine einzige senkrechte Linie, und diese fällt nach (§. 35.) mit der BA zusammen.

2) Daher fällt auch die von A aus auf die Ebene MN senkrecht gedachte Linie, nothwendig ganz in die durch A gehende und auf MN senkrechte Ebene PQ.

3) Wird in einer auf der Ebene MN senkrechten Ebene PQ, eine Gerade BA so gezogen, daß sie auf irgend einer von BC verschiedenenen Geraden BD (in der Ebene) senkrecht steht, so steht solche auf der ganzen Ebene MN senkrecht (nach §. 18. N. 4.).

§. 37. Zusätze.

1) Fällt man daher, wenn (Fig. 14.) PBA der Neigungs-Winkel ist für den durch PMQ und MNQ gebildeten Flächen-

Winkel, von einem beliebigen Punkte P in der Ebene PBA auf BA die senkrechte PA, so steht solche auf der ganzen Ebene MN senkrecht.

Weil der Neigungs-Winkel (die Ebene) **PBA** selbst auf der Ebene **MN** senkrecht steht (nach §. 35. Anmerk.), weil also der §. 36. eintritt.

2) Fällt man von P aus auf die Ebene MN eine Senkrechte, so fällt sie in die Ebene PBA des Neigungs-Winkels und steht natürlich dann auch senkrecht auf BA (nach §. 36. N. 2.).

3) Bilden PMQ und MN einen Flächen-Winkel mit einander; fällt man von einem beliebigen Punkte P, auf den ebenen Schenkel MN die senkrechte Linie PA, und dann von A aus auf MQ die senkrechte AB, so steht auch PB senkrecht auf MQ.

Solches folgt unmittelbar aus §. 16., in so fern **PB** eine gegen die Ebene **MN** schief stehende Gerade ist, welche mit der auf **BA** senkrechten **MQ** einen rechten Winkel bildet.

4) Umgekehrt, wird **PB** zuerst senkrecht gedacht auf **MQ**, so muß auch **AB** senkrecht stehen auf **MQ**; sobald nämlich vorher **PA** senkrecht gedacht worden ist auf die Ebene **MN**.

Unmittelbar aus §. 18. N. 4.

Note. Für die Construktion des Neigungs-Winkels haben diese beiden letztern Sätze späterhin große Wichtigkeit. Man fällt von dem einen ebenen Schenkel auf den andern eine senkrechte Linie **PA**, zieht von **A** aus **AB** senkrecht auf die Kante, und verbindet **P** und **B** durch die gerade **PB**, so ist **ABP** der gesuchte Neigungs-Winkel, und zugleich **PB** senkrecht auf **MQ**.

5) Und weil von P aus auf MQ nur eine einzige senkrechte Linie möglich ist, so werden die von P und A aus auf die Kante senkrecht gezogenen Linien auch jedesmal in demselben Punkte B zusammentreffen, wenn nur A der Fuß-Punkt der von P auf die Ebene MN gefällten senkrechten Linie PA ist.

Anmerkung. Denkt man sich daher aus einem beliebigen Punkte P in dem einen ebenen Schenkel eines Flächen-

Winkels, auf den andern ebenen Schenkel eine senkrechte Linie PA, so fällt solche nothwendig allemal in den spitzen der beiden durch PMQ und MN gebildeten Neben-Flächen-Winkel.

§. 38. Lehrsatz.

Steht eine Ebene A senkrecht auf zweien andern sich schneidenden Ebenen B und C, so steht sie auch senkrecht auf ihrer Durchschnittslinie (L. B, C).

Beweis. Denn alle drei Ebenen treffen in einem Punkte α der Linie (L. B, C) zusammen. Denkt man sich daher von α aus auf A eine senkrechte Linie errichtet, so muß diese (nach §. 36. N. 1.) ganz in die senkrechte Ebene B und, aus demselben Grunde, auch ganz in die senkrechte Ebene C fallen, kann also von der Durchschnittslinie (L. B, C) der letztern beiden Ebenen nicht verschieden seyn.

§. 39. Zusatz.

1) Steht eine Gerade AB schief auf einer Ebene MN, oder läuft sie mit ihr parallel, so läßt sich allemal eine Ebene durchlegen, aber nur eine einzige, welche senkrecht auf MN steht (Fig. 15.). Und diese ist im ersten Falle allemal die Ebene des Neigungs-Winkels der Linie AB gegen die Ebene MN.

Denn es läßt sich allemal von einem Punkte A aus auf die Ebene MN eine senkrechte Linie AC fällen, und die Ebene BAC geht dann allemal durch AB hindurch und steht senkrecht auf der Ebene MN, weil die senkrechte Linie AC in ihr liegt.

Gienge aber noch eine zweite Ebene durch AB, senkrecht auf MN, so müßte, da AB die Durchschnittslinie beider wäre, auch diese auf MN senkrecht stehen (nach §. 38.), was gegen die Voraussetzung ist.

2) Zwischen zwei nicht in einer und derselben Ebene liegenden Geraden a und b läßt sich allemal eine, aber nur eine einzige Gerade legen, welche auf beiden Linien a und b zugleich senkrecht steht, und diese ist auch die kürzeste unter allen Linien, welche zwischen a und b gezogen werden können.

Denn die Gerade, welche auf beiden Linien a und b zugleich senkrecht steht, in den Punkten α und β, muß zugleich senkrecht stehen auf der durch β mit a parallel gelegten Linie c, also auch auf der durch b gehenden (nach §. 22.) einzigen mit a parallelen Ebene (Eb. b, c), und zugleich in der Ebene (Eb. a, c) liegen, so daß diese Ebene (Eb. a, c) auf der andern (Eb. b, c) nothwendig senkrecht stehen muß. Nun läßt sich aber durch a auf die, durch b gelegte, mit a parallele einzige Ebene, nur eine einzige senkrechte Ebene legen, und diese schneidet die Linie b nur in einem einzigen Punkte und von diesem Punkte läßt sich nur eine einzige senkrechte Linie auf die mit a parallele Ebene errichten, welche zugleich die Linie a trifft, und dann auf a und b zugleich senkrecht steht.

Daß aber die auf beiden Linien a und b zugleich senkrechte Linie $\alpha\beta$ die kürzeste ist, wird so eingesehen. Da nämlich diese Linie $\alpha\beta$ senkrecht steht auf a und auch auf der mit a parallelen durch b laufenden Ebene (Eb. b, c), so ist sie der senkrechte Abstand eines jeden Punktes der Linie a von der Ebene (Eb. b, c). Jede andere Linie, die von irgend einem Punkte in a, nach irgend einem Punkt in b gezogen wird, kann aber auf der Ebene (Eb. b, c) nicht senkrecht stehen, ist also länger, als der senkrechte Abstand desselben Punktes von derselben Ebene, d. h. länger als die Linie $\alpha\beta$, welche auf beiden Linien a und b zugleich senkrecht steht.

§. 40. Lehrsatz.

Legt man durch eine schief auf MN stehende Linie AB mehrere Ebenen (Fig. 21.) ABC, ABD, ABE, ABF, ABH, welche die MN in den Linien BC, BD, BE, BF, BH schneiden, so steht die ABC, welche durch die auf MN senkrechte Linie AC hindurchgeht, senkrecht auf MN; die übrigen Ebenen ABD, ABE, ꝛc. bilden aber mit MN immer spitzere (und natürlich dann auch immer stumpfere Neben-) Winkel, je größer die Winkel DBC, EBC, ꝛc. werden, bis endlich die Ebene ABF, deren Durchschnitts-Linie mit MN, nämlich BF, senkrecht auf BC steht, mit MN den spitzesten (und stumpfesten Neben-) Winkel macht, während zu gleicher Zeit BF, folglich auch ABF, senkrecht auf der Ebene des Neigungs-Winkels ABC steht. Und denkt man sich eine Ebene ABH, welche die MN in einer Linie BH so schneidet, daß W. HBF = W. EBF wird, so bilden diese

beiden Ebenen ABE und ABH mit dieser Ebene MN allemal gleiche Winkel.

Beweis. Denn man construire die Neigungs-Winkel AEC, ADC, nach §. 37. dadurch, daß man von C aus auf BD, BE die senkrechten CD, CE und dann AD, AE zieht. Es ist nun in den rechtwinklichen Dreiecken EBC und DBC die Hypothenuse BC dieselbe, dagegen W. EBC > W. DBC, also EC > DC. Und deshalb ist dann in den bei C rechtwinklichen Dreiecken, welche dieselbe Kathete AC haben, W. AEC < W. ADC. — Und aus demselben Grunde ist dann der Neigungs-Winkel CBA kleiner, als jeder der genannten AEC oder ADC, wie auch BE, BD rechts von BE liegen mögen.

Für den Flächen-Winkel, den ABH mit MN bildet, muß der Neigungs-Winkel ebenfalls dadurch gebildet werden, daß man von C aus auf BH eine senkrechte Linie fällt, welche aber, da nach der Voraussetzung HBC stumpf ist, in die Verlängerung BK treffen wird und welche CK selbst seyn mag, so daß jetzt AKC der Neigungs-Winkel ist. Nun ist aber W. FBE = W. FBH = W. JBK, also auch W. EBC = W. KBC, mithin sind die rechtwinklichen Dreiecke BCE und BCK congruent; daher ist auch CE = CK, und deshalb sind noch die rechtwinklichen Dreiecke AKC und AEC ebenfalls congruent, also die Neigungs-Winkel AKC und AEC einander gleich. Demnach ist unser Lehrsatz vollständig erwiesen.

§. 41. Zusatz.

Wenn daher zwei Ebenen in einer Linie AB (Fig. 21.) sich schneiden und wieder von einer dritten MN geschnitten werden, so daß die Durchschnitts-Linien nicht mit einander parallel laufen, so kann der äußere Flächen-Winkel größer, gleich, aber auch kleiner seyn, als der innere. Es ist nämlich der äußere Flächen-Winkel (Fig. 21.) ABDC immer größer als der innere ABEC, so oft die beiden Linien-Winkel ABD, ABE zusammen weniger wie zwei rechte ausmachen; es ist der äußere Flächen-Winkel ABEC dem innern ABHC gleich, wenn die Linien-Winkel ABE und ABH zusammen 2 rechte ausmachen; und es ist der äußere Flächen-Winkel ABLC oder ABOC kleiner als der innere ABHC, wenn

die Summe der Linien-Winkel ABL+ABH oder ABO+ABH größer ist als 2 rechte.

Der Beweis fällt in die Augen, sobald man die Sätze NN. 6.—8. des §. 18. und den Satz §. 40. zu Hülfe nimmt.

Note. Es ist eine für den Anfänger gute praktische Uebung, diesen Beweis, so wie Beweise ähnlicher Sätze, schriftlich auszuführen.

§. 42. Lehrsatz.

1) Zwei parallele Ebenen A und B werden von jeder dritten Ebene, die sie schneidet, allemal in parallelen Durchschnittslinien geschnitten.

Denn schnitten sich die letztern in irgend einem Punkte α, so träfen sich die Ebenen in demselben Punkte.

2) Jede in der einen A von zwei parallelen Ebenen gedachte Gerade a, ist auch mit der andern B der parallelen Ebenen parallel.

Denn schnitten sich a und B in α, so hätten auch A und B diesen Punkt α mit einander gemein.

§. 43. Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen A und B auf einer geraden Linie PQ, welche die Ebene A in P, die Ebene B dagegen in Q trifft, senkrecht stehen, so laufen die Ebenen A und B mit einander parallel (Fig. 4.).

Beweis. Denn schnitten sich diese Ebenen A und B irgend wo, so würde man einen Punkt R der Durchschnittslinie annehmen und in der Ebene A die Linie RP, in der Ebene B dagegen die Linie RQ ziehen können, so daß das Dreieck PQR entstände, welches, da PQ auf den Ebenen A und B, also auch auf den Linien PR und QR senkrecht stehen würde, zwei Winkel hätte, deren jeder ein rechter wäre; was nicht möglich. Also können sich die Ebenen A und B nirgends schneiden.

§. 44. Lehrsatz.

Umgekehrt, sind zwei Ebenen A und B mit einander paral-

lel, und steht eine Linie PQ senkrecht auf der einen Ebene A, so steht sie auch senkrecht auf der andern Ebene B (Fig. 5.).

Beweis. Denn man beweise, daß die Linie PQ auf zweien Linien QR und QS senkrecht steht, welche durch Q beliebig in der Ebene B gezogen werden können. Es werden aber die Ebenen RQP und SQP die Ebene A schneiden in geraden, mit QR und QS bezüglich parallelen Linien PT und PU (nach §. 42.). Und weil nun QP senkrecht steht auf PT und PU, so steht sie auch senkrecht auf den mit PT und PU parallelen Linien QR und QS, folglich auch auf der Ebene B.

Anmerkung. Man kann denselben Satz auch sehr leicht rein indirekt erweisen.

§. 45. Lehrsatz.

Eine Gerade AB ist gegen zwei parallele Ebenen MN und PQ (Fig. 19.) gleich geneigt.

Denn die von A aus gefällte Senkrechte AE steht in D und in E auf beiden parallelen Ebenen zugleich senkrecht; und die Linien CD und BE als Durchschnittslinien zweier parallelen Ebenen mit einer dritten ABE, sind mit einander parallel; also ist auch W. ACD = W. ABE.

Note. Ist aber eine Gerade AB gegen zwei Ebenen gleich geneigt, so sind letztere deshalb noch nicht nothwendig mit einander parallel.

§. 46. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien (Fig. 5.) PT und PU, welche sich in P schneiden, mit einer Ebene B parallel sind, so ist die Ebene UPT oder A selbst mit der Ebene B parallel.

Beweis. Denn man fälle von P auf die Ebene B die Senkrechte PQ, und lasse B von den Ebenen QPT und QPU in den geraden Linien QR und QS schneiden; so sind (nach §. 21.) die Linien QR und PT, desgleichen QS und PU mit einander parallel; also steht auch PQ auf PT und auf PU, also auch auf der Ebene TPU oder A senkrecht, und die Ebenen A und B sind daher mit einander parallel, weil sie beide auf PQ senkrecht stehen.

Werden daher zwei Winkel von parallelen Schenkeln gebildet, so sind sie nicht bloß (nach §. 11.) einander gleich, sondern es sind auch ihre Ebenen mit einander parallel.

§. 47. Lehrsatz.

Sind zwei Ebenen A und B mit einander parallel, oder ist eine Linie a mit einer Ebene B parallel, so stehen alle Punkte der einen von der andern Ebene gleich weit ab, man mag die Abstände senkrecht nehmen, oder nicht, wenn sie nur im letztern Falle ebenfalls mit einander parallel gedacht sind.

Beweis. Denn es entstehen, verbindet man die Punkte in jeder Ebene mit einander durch gerade Linien, allemal Parallelogramme, deren gegenüberliegende Seiten (und darunter die gedachten Abstände) gleich seyn müssen.

§. 48. Zusatz.

Umgekehrt: Stehen zwei Punkte einer Linie a, oder drei nicht in derselben Richtung liegende Punkte einer Ebene A, von einer Ebene B gleich weit ab (es mögen diese Abstände senkrecht oder schief genommen werden, wenn nur in letzterem Falle auch mit einander parallel), so ist die Linie a oder die Ebene A mit der Ebene B parallel.

Denn für die Linie a erhellet dies augenblicklich aus den entstehenden Parallelogrammen. Für die Ebene A dagegen daraus, daß in ihr zwei sich schneidende Linien entstehen, welche mit B parallel seyn müssen (§. 46.).

§. 49. Lehrsatz.

Jeder Punkt α, welcher von einer Ebene B eben so weit absteht, als nach derselben Seite eine mit B parallele Ebene A, liegt nothwendig in letzterer, oder die Ebene A geht nothwendig durch ihn hindurch.

Beweis. Denn läge er über oder unter der Ebene A, so würde der

Abstand $\alpha\beta$ die Ebene A in einem Punkte γ schneiden, so daß $\alpha\beta \gtrless \gamma\beta$ wäre, während nach der Voraussetzung $\alpha\beta = \gamma\beta$ seyn soll.

§. 50. Zusatz.

Alle durch einen Punkt α im Raume, mit einer Ebene B parallel gedachten Linien liegen in einer und derselben, mit B parallelen Ebene.

Denn ihre Punkte stehen alle von der Ebene B gleich weit und eben so weit ab, als der Punkt α. Alle diese Linien (d. h. alle ihre Punkte) müssen daher in der durch α mit B parallel gedachten Ebene A liegen (§. 49.).

§. 51. Zusatz.

Stehen zwei Ebenen A und C von einer Ebene B auf derselben Seite gleich weit ab, so fallen sie nothwendig in eine und dieselbe zusammen.

Denn es muß jeder Punkt der einen Ebene C auch in der andern A liegen (§. 49.).

§. 52. Lehrsatz.

Ist eine Linie a mit einer Ebene A parallel, so ist sie auch mit jeder andern mit A parallelen Ebene B parallel.

Beweis. Denn die senkrechten Abstände ihrer Punkte von der einen Ebene A, und die Abstände zwischen A und B, folglich auch die Abstände der Linie a von B, als Summen oder Differenzen gleicher Theile, sind einander gleich.

§. 53. Zusatz.

Wenn eine Linie a eine von zwei parallelen Ebenen A und B schneidet, z. B. A, so schneidet sie auch die andere B.

Denn liefe sie mit B parallel, so müßte sie auch mit A parallel seyn (nach §. 52.).

§. 54. Zusatz.

Wenn eine von zwei parallelen Ebenen A und B z. B. die Ebene A, von einer dritten Ebene C geschnitten wird, so wird auch die andere B der parallelen Ebenen von C geschnitten.

Denn eine in C gedachte Linie, welche die A trifft, muß auch die B treffen und doch dabei ganz in C liegen.

§. 55. Zusatz.

1) Sind zwei Ebenen A und C einer dritten B parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

Denn würde A von C geschnitten, so würde nach (§. 53.) auch B von C geschnitten.

2) Durch einen Punkt α kann man mit einer Ebene B nur eine einzige parallele Ebene A legen.

Denn jede andere durch α gelegte Ebene würde die A, folglich auch die B schneiden.

§. 56. Lehrsatz.

Denkt man sich zwischen drei parallelen Ebenen zwei beliebige gerade Linien, welche die Ebenen in den Punkten A, B, C und D, E, F (Fig. 7.) treffen, sie mögen übrigens in einer und derselben Ebene liegen oder nicht, so stehen die abgeschnittenen Stücke in Proportion, nämlich

$$AB:BC=DE:EF.$$

Beweis. Denn man ziehe AF, welche die mittlere Ebene in G treffen mag, und ziehe GB und GE, so sind die Linien CF und BG, desgleichen AD und GE mit einander parallel, folglich

$$AB:BC=AG:GF=DE:EF.$$

§. 57. Lehrsatz.

Werden zwei Ebenen MN und PQ (Fig. 16.) von einer dritten Ebene RS in parallelen Linien VT und WU, und so

geschnitten, daß der äußere Flächen-Winkel STN dem innern SUQ gleich ist, so laufen die Ebenen MN und PQ mit einander parallel.

Denn man construire die Neigungs-Winkel, dadurch, daß man in der Kante VT einen Punkt A annimmt und in der Ebene SR auf VT die senkrechte Linie CAB zieht, welche in B auf der mit VT parallelen WU zugleich senkrecht steht; dann aber durch CAB eine Ebene legt senkrecht auf SR, welche die Ebenen MN und PQ in den Linien AD und BE schneiden mag. Diese Geraden stehen dann bezüglich auf VT und WU senkrecht, weil die letztern auf der Ebene CADBE senkrecht stehen, in so fern sie in der auf CADBE senkrechten Ebene SR liegen und auf der Kante CAB senkrecht stehen (§§. 35. 36.).

Nun ist nach der Voraussetzung W. CAD = W. CBE, also AD mit BE parallel. Nach der Voraussetzung ist aber auch VT mit WU parallel; folglich sind auch die Ebenen DAT und EBU, d. h. die Ebenen MN und PQ unter sich parallel, weil zwei sich schneidende Linien in ihnen mit einander parallel laufen (§. 46.).

§. 58. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen MN und PQ von einer dritten Ebene RS geschnitten werden, so sind die äußern und innern Flächen-Winkel einander gleich (Fig. 16.).

Beweis. Denn man construire genau wie im vorhergehenden Paragraphen, so sind jetzt die Linien AD und BE parallel, als Durchschnittslinien zweier parallelen Ebenen mit einer dritten CADBE; folglich ist W. CAD = W. CBE.

§. 59. Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen MN und PQ von einer dritten RS in parallelen Linien VT und WU geschnitten werden, und wenn zugleich der äußere Flächen-Winkel STN größer ist, als der innere SUQ, so schneiden sich die Ebenen MN und PQ auf derselben Seite (Fig. 16.).

Beweis. Denn construirt man die Neigungs-Winkel wie (§. 57.) geschehen, so müssen sich, da W. CAD > W. CBE ist, die Linien AD und BE schneiden, also dann auch die Ebenen MN und PQ, in denen sie liegen.

§. 60. Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen MN und PQ sich schneiden und wieder von einer dritten in parallelen Linien VT und WU geschnitten werden, so ist auf derselben Seite der äußere Winkel STN größer als der innere SUQ (Fig. 16.).

Beweis. Denn construirt man die Neigungs-Winkel, wie im (§. 57.), so werden die Linien AD und BE, da sie in derselben Ebene liegen, zugleich mit den Ebenen MN und PQ sich schneiden. Und dieses letztern Umstandes wegen, ist $\mathfrak{W}.CAD > \mathfrak{W}.CBE$.

§. 61. Zusätze.

1) Wenn zwei Ebenen A und B auf einer dritten C senkrecht stehen, und die Durchschnittslinien (L. A, C) und (L. B, C) mit einander parallel laufen, so sind die Ebenen A und B unter sich parallel.

Denn es ist der äußere Winkel dem innern gleich, nämlich jeder ein rechter.

2) Wenn eine Ebene C auf einer von zwei parallelen Ebenen A und B senkrecht steht, z. B. auf A, so steht sie auch auf der andern B senkrecht.

Denn es ist der äußere Winkel dem innern gleich; und weil der eine davon ein rechter ist, so ist solches auch der andere.

§. 62. Drei Lehrsätze und Erklärungen.

Schneiden sich zwei Ebenen A und B und werden beide wieder von einer dritten Ebene geschnitten, so daß die drei Durchschnittslinien (L. A, B), (L. A, C) und (L. B, C) entstehen, so sind nur drei Fälle möglich:

1) entweder alle drei Durchschnittslinien (L. A, B), (L. A, C) und (L. B, C) fallen in die einzige und erste (L. A, B) zusammen, wenn nämlich die dritte Ebene C gerade durch diese,

bereits den beiden Ebenen A und B gemeinschaftliche Linie (L. A, B) gelegt gedacht wird;

2) oder die drei Durchschnittslinien (L. A, B), (L. A, C) und (L. B, C) vereinigen sich alle drei in einem und demselben Puncte α (oder P. A, B, C), und der dadurch gebildete unendliche, wenn auch von den drei Ebenen A, B und C begrenzte, Raum heißt dann eine körperliche Ecke, besser ein körperliches Dreieck; die drei Linien (L. A, B), (L. A, C) und (L. B, C) von dem Punkte α an gerechnet, heißen die Kanten, — die drei Ebenen A, B, C selbst, so weit sie durch die Kanten begrenzt, also Linien-Winkel sind, die Seiten, endlich die drei Flächen-Winkel, welche die drei Ebenen A, B und C paarweise mit einander bilden und deren Scheitellinien oder Kanten bezüglich (L. A, B), (L. A, C) und (L. B, C) sind, schlechthin die Winkel des körperlichen Dreiecks;

3) oder endlich die drei Durchschnittslinien (L. A, B), (L. A, C) und (L. B, C) laufen paarweise mit einander parallel (ohne jedoch alle drei in einer und derselben Ebene zu liegen); und der dadurch gebildete unendliche, wenn auch von den drei Ebenen selbst begrenzte Raum, heißt ein prismatischer Raum, besser ein dreiseitig prismatischer Raum. — Ein vierter Fall ist nicht denkbar.

Beweis. 1) Es ist nicht möglich, daß zwei der drei Durchschnittslinien zusammenfallen, ohne daß die dritte mit zusammenfiele; denn die Durchschnittslinie (L. A, B) ist beiden Ebenen A und B gemeinschaftlich, und die Durchschnittslinie (L. A, C) beiden Ebenen A und C gemeinschaftlich. Fielen nun die beiden Durchschnittslinien (L. A, B) und (L. A, C) in eine und dieselbe zusammen, so wäre letztere allen drei Ebenen gemeinschaftlich, folglich zugleich die Durchschnittslinie (L. B, C). Es fallen also entweder die drei Durchschnittslinien in eine einzige zusammen, oder es sind alle drei von einander wirklich verschieden.

In dem andern Falle, wo die drei Durchschnittslinien wirklich von einander verschieden sind, werden die beiden (L. A, B) und (L. A, C) entweder sich einander schneiden, oder mit einander parallel seyn (weil sie beide in einer und derselben Ebene A liegen.).

2) Schneiden sich nun (L. A, B) und (L. A, C) in einem Punkte α, so liegt dieser Punkt in der Linie (L. A, B), also zugleich in der Ebene A und auch in der Ebene B; er liegt aber auch in der Linie (L. A, C), also zugleich in der Ebene A und in der Ebene C. Dieser Punkt α liegt also in allen drei Ebenen A, B und C zugleich, und ist daher auch einer von den Punkten, welche die Ebenen B und C mit einander gemein haben und welche alle in der Durchschnittslinie (L. B, C) liegen. Es geht also die 3te Durchschnittslinie (L. B, C) durch denselben Punkt α, in welchem die beiden erstern (L. A, B) und (L. A, C) sich bereits geschnitten haben.

3) Liefen endlich die beiden Durchschnittslinien (L. A, B) und (L. A, C) mit einander parallel, so könnte die dritte (L. B, C) deshalb keine der beiden andern Durchschnittslinien (L. A, B) und (L. A, C) treffen, weil, wenn dies der Fall wäre, die andere Durchschnittslinie (nach N. 2.) durch denselben Punkt durchgehen müßte, also die beiden erstern nicht parallel seyn könnten. Weil aber je zwei dieser Durchschnittslinien doch immer in einer und derselben Ebene liegen [z. B. (L. B, C) und (L. A, C) in der Ebene C], sich übrigens nicht schneiden können, so müssen sie in diesem Falle alle drei paarweise mit einander parallel laufen.

Anmerkung. Man kann sich auch einen prismatischen Raum denken, von mehr als drei Ebenen, die sich paarweise in parallelen Durchschnittslinien treffen, begrenzt. Dies giebt dann den 4seitigen, 5seitigen, nseitigen prismatischen Raum. — Aber eben so kann man sich mehr als drei Ebenen in einem und demselben Punkte α zusammentreffend denken, welche sich dann paarweise in einer durch α hindurchgehenden Geraden schneiden, und dies giebt das körperliche 4Eck, 5Eck ꝛc. ꝛc., nEck.

§. 63. Erklärungen.

1) Wird eine beliebige Ebene gelegt, welche alle Kanten eines körperlichen Dreiecks, Vierecks, Fünfecks oder nEcks schneidet, so erhält man die einfachsten geschlossenen (einen endlichen Raum einschließenden) körperlichen Raumfiguren, und diese werden Pyramiden genannt, welche sich in 3, 4, 5 und nseitige eintheilen. — Die Spitze der körperlichen Ecke heißt dann auch die Spitze der Pyramide. — Diejenigen Dreiecke, welche von der Spitze auslaufen und begrenzende Flächen der Pyramide sind,

heißen die Seitenflächen; die noch übrige, die Pyramide begrenzende ebene Figur, welche ein Dreieck, Viereck, Fünfeck oder nEck ist, wird dagegen die Grundfläche, — ihre nach allen Seiten ohne Ende gedachte Ebene aber, die Grundebene der Pyramide genannt.

Die Kanten der Pyramide theilen sich ebenfalls in Seitenkanten, welche von der Spitze auslaufen, und Grundkanten, welche letztere die Durchschnittslinien der Seitenflächen mit der Grundfläche sind.

2) Werden dagegen alle Kanten eines drei-, vier-, fünf- oder nseitigen prismatischen Raumes von zwei beliebigen Ebenen dergestalt getroffen, daß sich letztere nicht innerhalb des prismatischen Raumes schneiden, so entstehen abermals einfache geschlossene Raumfiguren, welche man Prismen nennt. Die beiden Ebenen, welche den prismatischen Raum vollends begrenzen, heißen dabei die Grund-Ebenen, und die Durchschnittsfiguren derselben mit den Grenzflächen des prismatischen Raumes, welche Dreiecke, Vierecke, Fünfecke oder nEcke sind, werden die Grundflächen, — die übrigen begrenzenden Flächen-Figuren dagegen, welche entweder Parallelogramme oder Parallel-Trapeze sind, die Seitenflächen des Prisma genannt. Auch werden die Kanten des Prisma in Grundkanten und in Seitenkanten abgetheilt.

Das Prisma heißt endlich ein gemeines oder ein abgekürztes, je nachdem die beiden Grundflächen mit einander parallel laufen, oder nicht mit einander parallel sind.

Schluß-Anmerkung.

In Bezug auf die Flächen-Winkel konnte man auch einen Gang nehmen, ganz demjenigen analog, welcher für die Linien-Winkel (Eb. Geom. §§. 17.—28.) genommen worden ist, so daß man die eben angeführten Sätze der ebenen Geometrie in derselben Ordnung wiederholt, wörtlich, nur mit dem Unterschiede, daß man hier immer Flächen-Winkel und Kante setzt, wo dort Winkel schlechthin und Scheitel-Punkt oder Scheitel steht, und daß man in den vier Lehrsätzen, welche die Parallelen-Theorie ausmachen (Eb. G. §§. 22.—25.) jedesmal ausdrücklich die Bedingung hin-

zufügt, „daß die zwei Ebenen von der dritten noch in parallelen Durchschnittslinien geschnitten werden“ (wo sich solches nämlich nicht schon von selbst versteht). — Die Beweise müssen dann alle denjenigen genau analog geführt werden, welche sich dort (Eb. Geom. §§. 17. —25.) bereits vorfinden; und der ganze Gang wird selbst dem ersten Anfänger, der ihn versucht, keine bedeutenden Schwierigkeiten in den Weg legen.

Für Anfänger, also namentlich auch für den Unterricht, dürfte dieser Gang den Vortheil gewähren, daß der Schüler sich sogleich in das Gebiet der Körper-Lehre auf eine Art hineingeführt sieht, welche mit dem bereits Bekannten alles gemein hat, folglich gewissermaaßen ebenfalls schon als bekannt betrachtet wird.

Körperliche Geometrie.

Zweites Kapitel.

Von den körperlichen Viel-Ecken. Von den körperlichen Dreiecken insbesondere.

Vorerinnerung.

Von den köperlichen Dreiecken gelten eine Menge derselben Sätze, welche auch von den ebenen Dreiecken wahr sind; namentlich von einem Dreieck die Sätze:

In einem körperlichen Dreieck stehen gleichen Seiten auch gleiche Winkel, der größern Seite auch der größere Winkel, ferner gleichen Winkeln auch gleiche Seiten, so wie dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber. In einem körperlichen Dreieck ist die Summe je zweier Seiten allemal größer als die dritte.

Vergleicht man jedoch zwei körperliche Dreiecke mit einander, so findet man bald nicht bloß alle 5 Sätze der Congruenz, wie sie für ebene Dreiecke mitgetheilt worden sind (Eb. G. §. 31.), sondern auch noch einen 6ten, in so fern zwei körperliche Dreiecke auch noch congruent sind, wenn sie bezüglich drei gleiche Winkel haben. Doch tritt bei der Congruenz der körperlichen Dreiecke noch eine eigenthümliche Bedingung ein, welche die ebene Geometrie nicht kennt. Um diese Bedingung unsern Lesern recht anschaulich zu machen, erinnern wir solche an den linken und rechten Handschuh eines zusammengehörigen Paares, welche, an die Hände gesteckt, einander nicht congruent sind, welche aber congruent werden, wenn man einen davon umstülpt, so daß dann beide nach einander an dieselbe Hand gesteckt

werden können. — Zwei solche Körperfiguren kann man umgestülpt congruent nennen. Gewöhnlich werden sie symmetrische genannt.

Diese Eigenthümlichkeiten der körperlichen Dreiecke, welche sie theils mit den ebenen Dreiecken gemein, theils vor ihnen voraus haben, soll nun das vorstehende Kapitel in den einfachsten Fällen entwickeln.

§. 64.

Ein körperliches Dreieck (§. 62. N. 2.) hat drei Seiten (welche Linien-Winkel sind), und drei Winkel (welche Flächen-Winkel sind). — Ein körperliches nEck hat n Seiten und n Winkel, während auch bei diesem die Seiten nichts anders als Linien-Winkel und die Winkel nichts anders als Flächen-Winkel sind. — Die Kanten im körperlichen Dreieck oder nEck gehen immer ohne Ende fort, so daß weder im körperlichen Dreieck, noch im körperlichen nEck eine völlig begrenzte gerade Linie erscheint.

Ein körperliches Dreieck heißt rechtwinklich, wenn einer der Winkel ein rechter ist. Die ihn einschließenden Seiten werden dann die Katheten, die ihm gegenüberliegende Seite dagegen die Hypothenuse genannt.

Anmerkung 1. Die Aufgabe: „zwischen den drei Seiten „und den drei Winkeln eines körperlichen Dreiecks drei Gleichungen „chen sich zu verschaffen, und mittelst dieser drei Gleichungen „von den sechs genannten Stücken die drei übrigen aus drei beliebig gegebenen derselben zu finden" in ihrem ganzen Umfange durchgeführt, giebt die sogenannte sphärische Trigonometrie, welche man demnach füglicher die körperliche Trigonometrie nennen könnte, im Gegensatz der in den beiden letzten Kapiteln der ebenen Geometrie behandelten ebenen Trigonometrie, in so fern wiederum beide nichts anders sind als Anwendungen der im 9ten Kapitel der ebenen Geometrie gelehrten analytischen Trigonometrie, — die eine auf ebene Dreiecke, die andere auf körperliche Dreicke.

Uebrigens wird die sphärische Trigonometrie weiter unten

so vorgetragen, daß sie ihren letztern Namen ebenfalls gerechtfertigt sieht.

Anmerkung 2. Nach der Definition des körperlichen Dreiecks (oder Vielecks) giebt es auch Dreiecke (Vielecke) mit erhabenen Winkeln. Wir aber setzen hier, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird, ein für allemal nur solche Dreiecke oder Vielecke voraus, welche hohle (Flächen-) Winkel haben, d. h. spitze, stumpfe oder rechte.

§. 65. Erklärungen.

Denkt man sich in einem körperlichen Dreieck die drei Seiten (begrenzende Ebenen) nach allen Richtungen hin verlängert (oder die drei Kanten jenseits der Spitze verlängert), so entstehen acht körperliche Dreiecke *). Eines darunter ist dem gegebenen gerade am Scheitel entgegengesetzt, hat zu Kanten genau die drei Verlängerungen der Kanten des gegebenen und heißt das Scheitel-Dreieck **) des erstern. — Auf dieselbe Weise hat jedes körperliche nEck ein Scheitel-nEck.

Denkt man sich ferner aus der Spitze eines körperlichen Dreiecks drei senkrechte Linien auf die drei Seiten, und zwar zunächst von jeder senkrechten Linie nur das Stück von der Spitze an nach außen genommen, z. B. (Fig. 23.) c′ senkrecht auf (Eb. a, b), b′ senkrecht auf (Eb. a, c) und a′ senkrecht auf (Eb. b, c), so bilden diese drei Kanten a′, b′, c′ ein neues körperliches Dreieck, welches das Ergänzungs-Dreieck des gegebenen genannt wird.

---

*) Sind a, b, c die drei Kanten, und a_1, b_1, c_1 ihre Verlängerungen, so sind diese acht Dreiecke von folgenden Kanten gebildet:

1) a, b, c; 2) a, b, c_1; 3) a, b_1, c; 4) a_1, b, c;
5) a, b_1, c_1; 6) a_1, b, c_1; 7) a_1, b_1, c; 8) a_1, b_1, c_1 (Fig. 22).

**) Ist a, b, c das gegebene Dreieck, so ist a_1, b_1, c_1 das Scheitel-Dreieck (Fig. 22.).

Ganz auf dieselbe Weise kann man sich auch für ein gegebenes körperliches Viereck, Fünfeck, oder nEck ein Ergänzungs-Viereck-, Fünfeck-, nEck gebildet denken.

§. 66. Zusätze.

1) Sind *) Δ (a, b, c) und $\Delta(a_1, b_1, c_1)$ Scheitel-Dreiecke (Fig. 22.), so sind die Winkel bei a und bei a_1, eben so bei b und bei b_1, endlich die bei c und bei c_1 Scheitel-Winkel, also bezüglich einander gleich.

Ferner sind die Seiten $a\alpha b$ und $a_1\alpha b_1$, desgleichen $a\alpha c$ und $a_1\alpha c_1$, endlich $b\alpha c$ und $b_1\alpha c_1$, als Scheitel-Linien-Winkel bezüglich einander gleich. — Die Scheitel-Dreiecke haben also bezüglich und nach der Ordnung gleiche Seiten und gleiche Winkel, sind aber nicht congruent, weil die gleichen Stücke in beiden, ringsumher gehend, in verschiedenen Richtungen auf einander folgen. — Dasselbe gilt von Scheitel-Vielecken überhaupt.

Note. Zur Congruenz zweier körperlichen Ecken ist also nicht hinreichend, daß sie genau dieselben Seiten und dieselben Winkel in derselben Ordnung auf einander folgend haben, sondern es muß auch noch die Richtung dieselbe seyn, in welcher diese gleichen Stücke auf einander folgen, d. h. wenn man die Ecken mit einem gleichen Stücke auf einander gelegt denkt, so müssen die gleichen Stücke in jedem, entweder zugleich rechts herum, oder zugleich links herum auf einander folgen.

2) Ist Δ (a', b', c') (Fig. 23.) das Ergänzungs-Dreieck vom Δ (a, b, c), so ist auch Δ (a, b, c) das Ergänzungs-Dreieck vom Δ (a', b', c'). — Dasselbe gilt auch für Ergänzungs-Vielecke.

Denn da a' senkrecht steht auf (Eb. b, c), und b' senkrecht auf (Eb. a, c), so stehen a' und b' zugleich auf c, also c auf (Eb. a', b') senk-

---

*) Es mag erlaubt seyn, das von den drei Kanten a, b, c gebildete körperliche Dreieck durch Δ (a, b, c) zu bezeichnen, und seine drei Seiten (Linien-Winkel) durch $a\alpha b$, $a\alpha c$, $b\alpha c$, so wie seine drei Winkel bloß durch W. a, W. b, W. c.

recht. Eben so erhellet, daß auch b auf (Eb. a', c') und a auf (Eb. b', c') senkrecht steht. —

3) Der Neigungs-Winkel bei a und die Seite b'αc' ergänzen einander zu zweien rechten Winkeln (nach §. 28.). Eben so der Winkel bei b und die Seite a'αc'. Endlich auch der Winkel bei c und die Seite a'αb'. — Und aus N. 2. folgt dann, daß nicht bloß die Winkel des Dreiecks Δ (a, b, c) die Seiten des Ergänzungs-Dreiecks Δ (a', b', c'), sondern auch die Seiten des erstern, die Winkel des letztern bezüglich zu zweien rechten Winkeln ergänzen. — Dasselbe gilt natürlich aus denselben Gründen auch für beliebige Ergänzungs-Vielecke.

4) Sind zwei körperliche Dreiecke congruent, so sind auch ihre Ergänzungs-Dreiecke congruent, weil auf jede der in den congruenten Dreiecken zusammenfallenden Ebenen von einem Punkte α aus nur eine senkrechte Linie errichtet werden kann. Dasselbe gilt für Ergänzungs-Vielecke.

§. 67. Lehrsatz.

Nimmt man in der Kante b eines körperlichen Dreiecks, dessen Spitze α und dessen drei Kanten a, b, c sind, einen beliebigen Punkt β an und fällt von β aus auf die gegenüberstehende Seite (Eb. a, c) die Senkrechte βγ, welche die (Eb. a, c) in γ trifft, so sind (Fig. 22.):

1) die Winkel W. a und W. c spitze Winkel, wenn γ in aαc selbst liegt, und umgekehrt muß γ in aαc selbst fallen, wenn W. a und W. c zugleich spitze Winkel sind;

2) die Winkel W. a und W. c zugleich stumpf, wenn γ in $a_1\alpha c_1$ fällt, und umgekehrt muß γ in $a_1\alpha c_1$ fallen, so oft beide Winkel W. a und W. c zugleich stumpf sind; — ferner ist:

3) W. a spitz und W. c stumpf, wenn γ in $c\alpha a_1$ zu liegen kommt; und umgekehrt muß γ in $c\alpha a_1$ fallen, so oft W. a spitz und W. c stumpf seyn sollte; — dann ist

4) W. a stumpf und W. c spitz, wenn γ in $a\alpha c_1$ fällt; und umgekehrt muß γ gerade in $a\alpha c_1$ fallen, so oft W. a stumpf und W. c spitz ist. — Ferner

5) fällt γ in die Kante a selbst, oder in die Verlängerung a_1, je nachdem, während der Winkel W. a allemal ein rechter ist, W. c spitz oder stumpf seyn wird, und umgekehrt muß γ in a oder a_1 fallen, so oft W. a recht, W. c dagegen spitz oder stumpf ist.

6) Endlich fällt γ in die Kante c oder c_1, je nachdem, während W. c ein rechter Winkel ist, W. a spitz oder stumpf seyn wird; und auch umgekehrt gilt der Satz wieder.

7) Zuletzt fällt γ in α selbst, wenn W. a und W. c beide rechte Winkel sind; und umgekehrt, sind beide Winkel W. a und W. c rechte, so muß γ in α fallen.

Beweis. Denn, fällt man von einem Schenkel eines Flächen-Winkels auf den andern ebenen Schenkel eine senkrechte Linie $\beta\gamma$, so fällt solche allemal mit dem Schenkel ganz zusammen, wenn beide Schenkel auf einander senkrecht stehen, also wenn der Flächen-Winkel ein rechter ist (§. 36.); oder er fällt in den spitzen der Neben-Winkel, wenn die Ebenen schief auf einander stehen (§. 37.).

§. 68. Lehrsatz.

Hat man (Fig. 24.), $\beta\gamma$ (wie im vorigen §.) senkrecht auf $a\alpha c$ gefällt, so kann man noch von γ aus auf die Kante a oder ihre Verlängerung die senkrechte $\gamma\delta$ und auf die Kante c oder ihre Verlängerung die senkrechte $\gamma\varepsilon$ fällen. Bekanntlich sind dann (nach §. 37.) $\beta\delta\gamma$ und $\beta\varepsilon\gamma$ die correspondirenden Linien-Winkel der Winkel a und c, oder doch ihre Neben-Winkel, wenn die Winkel selbst stumpf seyn sollten. Während nun γ in $a\alpha c$ oder $a\alpha c_1$ oder $a_1\alpha c$ oder $a_1\alpha c_1$ liegt, kann δ doch jedesmal noch in a selbst, aber auch in a_1, eben so ε in c selbst, aber auch in c_1 zu liegen kommen. Es ist aber allemal:

1) die Seite b∝a spitz, recht oder stumpf, so oft δ in a selbst oder in ∝ oder in a_1 zu liegen kommt; und derselbe Satz gilt auch umgekehrt; eben so ist allemal

2) die Seite b∝c spitz, recht oder stumpf, je nachdem ε in c selbst oder in ∝ oder in c_1 zu liegen kommt; und auch dies gilt noch umgekehrt.

Beweis. Denn nach (§. 37.) steht auch βδ senkrecht auf der Richtung a_1∝a, und βε senkrecht auf der Richtung c_1∝c; und die senkrechte Linie fällt allemal in den spitzen der Neben-Winkel.

§. 69. Zusätze.

1) Fällt nun γ in a∝c selbst, so werden δ und ε wie in (Fig. 24.) zu liegen kommen müssen, so oft die Seite a∝c spitz oder recht ist, weil dann die Winkel γ∝a und γ∝c nothwendig spitz seyn müssen. Ist dagegen die Seite a∝c stumpf, so wird ein jeder der Winkel γ∝a oder γ∝c recht, auch stumpf seyn können, auch noch spitz, während der andere allemal spitz gedacht ist; wie solches in der (Fig. 25.) näher zu sehen ist, wenn man bemerken will, daß die verschiedenen Lagen von γ, δ, ε durch beigefügte Striche von einander abgesondert, und daß a∝γ′ und c∝γ‴ als rechte Winkel gedacht sind.

Sind also die Winkel W. a und W. c beide spitz, so sind nothwendig auch die gegenüberstehenden Seiten b∝a und b∝c spitz, so oft die dritte Seite a∝c spitz oder recht ist; dagegen wird, wenn die dritte Seite a∝c stumpf ist, eine jede der beiden Seiten b∝a oder b∝c spitz, auch recht, auch stumpf seyn können, während die andere spitz gedacht ist. (Es können also unter den letztern Voraussetzungen nie beide Seiten b∝a und b∝c zugleich recht oder zugleich stumpf seyn, sondern eine davon muß immer spitz seyn.) Sind also zwei Winkel spitz, so ist eine der beiden ihnen gegenüber liegenden Seiten allemal spitz.

Fällt γ in a_1∝c_1 (Figg. 26. 27.), so werden δ und ε in a_1 und c_1 fallen, so oft a∝c spitz oder recht ist; dagegen wird

auch δ in α oder a fallen können, während ε in c_1 liegt, oder ε in α und c, während δ in a_1 liegt, so oft $a\alpha c$ stumpf ist.

Sind also die Winkel W. a und W. c beide stumpf, so sind nothwendig auch die beiden gegenüberliegenden Seiten $b\alpha a$ und $b\alpha c$ stumpf, so oft die dritte Seite $a\alpha c$ spitz oder recht ist; dagegen wird nur eine der Seiten $b\alpha a$ und $b\alpha c$ stumpf seyn müssen, während die andere stumpf, recht und auch spitz seyn kann, so oft die dritte Seite $a\alpha c$ stumpf ist.

3) Fällt γ in $c\alpha a_1$, so wird ε in c, und δ in a_1 fallen, so oft $c\alpha a_1$ spitz oder recht, also $a\alpha c$ stumpf oder recht ist (Fig. 28.); dagegen werden, so oft $a\alpha c$ spitz, also $c\alpha a_1$ stumpf ist (Fig. 29.), die Winkel $\gamma\alpha c$ und $\gamma\alpha a_1$ beide spitz, oder jeder beliebige davon ein rechter oder ein stumpfer seyn können, während der andere ein spitzer Winkel ist; es wird also in diesem letztern Falle, wo $a\alpha c$ spitz ist, δ in a_1 und ε in c, δ in a_1 und ε in α, δ in a_1 und ε in c_1, δ in α und ε in c, δ in a und ε in c fallen können. Ein weiterer Fall ist jedoch nicht möglich.

Ist daher der Winkel a spitz, W. c dagegen stumpf, so wird die dem stumpfen Winkel c gegenüberliegende Seite $b\alpha a$ auch stumpf, und die dem spitzen Winkel a gegenüberliegende Seite $b\alpha c$ auch spitz seyn müssen, so oft die dritte Seite $a\alpha c$ stumpf oder recht ist; ist dagegen die dritte Seite $a\alpha c$ spitz, so wird die dem stumpfen Winkel c gegenüberliegende Seite $b\alpha a$ noch immer stumpf seyn können, während die andere Seite $b\alpha c$ stumpf, recht, auch spitz seyn kann; es wird aber auch $b\alpha a$ recht und spitz seyn können, während jedoch die andere Seite $b\alpha c$ dann allemal spitz seyn muß.

4) Nimmt man a stumpf und c spitz an, so erhält man offenbar dieselben Ergebnisse, wie in (N. 3.), wenn man nur durchgehends die Buchstaben δ und ε und bezüglich a und c mit einander vertauscht.

5) Ist a ein rechter Winkel und c spitz, so fällt γ und δ in a zusammen, und ε fällt dann in c (Fig. 30.) oder in α oder in c_1 (Fig. 31.), je nachdem die Kathete $a\alpha c$ spitz, recht

oder ſtumpf iſt. Es iſt alſo dann die Seite (Kathete) b∝a allemal ſpitz (die dem ſpitzen Winkel c gegenüberſteht); dagegen die andere Seite b∝c (die Hypothenuſe) ſpitz, recht oder ſtumpf, je nachdem die andere Kathete a∝c ſpitz, recht oder ſtumpf iſt.

Iſt a ein rechter Winkel und c ſtumpf (Figg. 32. und 33.), ſo fällt γ mit δ in a_1 zuſammen, und es iſt daher die (dem ſtumpfen Winkel c gegenüberliegende) Kathete b∝a allemal ſtumpf, dagegen die Hypothenuſe b∝c ſtumpf, recht oder ſpitz, je nachdem die andere Kathete a∝c ſpitz (Fig. 32.), recht oder ſtumpf (Fig. 33.) iſt.

Aus dieſem letztern geht alſo hervor:

In einem beliebigen, bei a rechtwinklichen körperlichen Dreiecke, iſt jede Kathete mit dem ihr gegenüberliegenden Winkel zugleich ſpitz oder zugleich ſtumpf, auch zugleich recht; die Hypothenuſe dagegen iſt ſpitz, recht oder ſtumpf, wenn die eine Kathete ſpitz, die andere dagegen ſpitz, recht oder ſtumpf, oder wenn die eine Kathete ſtumpf, die andere dagegen ſtumpf, recht oder ſpitz iſt.

Iſt alſo irgend eine der Katheten recht, ſo iſt die Hypothenuſe ebenfalls recht, und ſind beide Katheten recht, ſo ſind alle Winkel und alle Seiten rechte. — Umgekehrt, iſt die Hypothenuſe recht, ſo iſt auch nothwendig eine der Katheten recht, nach (§. 18. R. 4.).

Note. Der Anfänger, welcher hier noch Schwierigkeiten finden ſollte, wird wohl thun, das ganze erſte Kapitel zuvor ſich recht anzueignen, beſonders aber, für die hieſigen Unterſuchungen, von §. 35. an.

§. 70. Zuſatz.

Aehnliche Unterſuchungen, wie ſie in dem letztern Paragraphen angeſtellt ſind, könnte man auf mannigfach abgeänderte Weiſe anſtellen. Statt z. B. die Winkel bei a und c als ſpitz oder ſtumpf anzunehmen, und das Verhalten der Seiten zu einander in jedem angenommenen Falle zu beurtheilen, könnte man zwei Seiten als ſpitz oder ſtumpf annehmen, und aus der: jedes-

maligen Annahme das Verhalten der Winkel zu einander folgern; oder man könnte eine Seite und einen Winkel als spitz oder stumpf annehmen, und untersuchen, ob sich nicht aus jeder dieser Annahmen das Verhalten der übrigen Seiten und Winkel zu einander werde beurtheilen lassen.

Um dies wenigstens durch ein Beispiel noch zu erläutern, wollen wir einmal:

1) die Seiten bαa und bαc beide spitz annehmen, so fallen δ und ε in a und c selbst, und γ wird erhalten, wenn man in δ und ε senkrechte Linien auf a und c errichtet und solche schneiden läßt. Da sich nun solche Linien nothwendig in aαc selbst schneiden, so oft aαc stumpf oder recht ist (Fig. 34.), so sind nothwendig auch dann beide, den Seiten bαc, bαa gegenüberliegenden Winkel ebenfalls spitz. Ist dagegen aαc spitz, so kann auch a stumpf oder recht und c spitz, oder c stumpf oder recht und a spitz seyn (Fig. 35.).

2) Eben so würde man finden, daß, wenn die beiden Seiten bαa und bαc zugleich stumpf sind, auch die beiden Winkel a und c zugleich stumpf seyn müssen, so oft aαc stumpf oder recht ist; daß aber a stumpf oder recht und c spitz, oder a spitz und c stumpf oder recht seyn kann, wenn aαc spitz ist.

3) Und sind beide Seiten bαc und bαa zugleich recht, so sind auch die beiden Winkel zugleich recht, weil dann b senkrecht steht auf a und c, also auch auf (Eb. a, c) und deshalb auch jede durch b gelegte Ebene z. B. (Eb. a, b) und (Eb. b, c) ebenfalls auf (Eb. a, c) senkrecht stehen muß.

4) Ist endlich bαc spitz, bαa dagegen stumpf, so fällt ε in c und δ in a_1 (Fig. 36.) und γ in $a_1\alpha c$, so daß W. a spitz und W. c stumpf seyn muß, wenn aαc spitz oder recht (d. h. $a_1\alpha c$ stumpf oder recht) ist. — Ist dagegen aαc stumpf (also $a_1\alpha c$ spitz), so können beide Winkel a und c spitz, oder beide stumpf, auch a spitz und c stumpf seyn. — Daß auch rechte Winkel mit unterlaufen können, fällt von selbst in die Augen.

Anmerkung. Wir verfolgen diese Gattung von Untersuchungen nicht weiter, weil das Wesen derselben hinlänglich herausgehoben zu seyn scheint, so daß man in jedem speciellen Falle sich leicht danach wird selbst zurecht finden können.

§. 71. Zusatz.

Sind beide Winkel W. a und W. c zugleich spitz, oder beide zugleich stumpf, so kann man durch b allemal eine auf aαc senkrechte Ebene $\alpha\beta\gamma$ legen, welche das körperliche Dreieck in zwei rechtwinkliche zerlegt, so daß die Summe der letztern das gegebene wieder ausmacht. Ist aber einer der Winkel z. B. W. a spitz, der andere W. c dagegen stumpf, so läßt sich durch b ebenfalls eine Ebene $\alpha\beta\gamma$ senkrecht auf (Eb. a, c) legen, welche abermals zwei rechtwinkliche Dreiecke bilden wird, so aber, daß das gegebene Dreieck als die Differenz dieser beiden erscheint.

Denn diese senkrechte Ebene entsteht gerade, wenn man in b einen Punkt β annimmt, von ihm aus auf (Eb. a, c) eine senkrechte $\beta\gamma$ fällt, und nun $\alpha\beta\gamma$ nimmt. Je nachdem nun γ in aαc oder $a_1\alpha c_1$ fällt, wird $\alpha\gamma$ die Seite aαc, und die Ebene $\alpha\beta\gamma$ den Winkel b in zwei Summanden zerlegen; wird aber γ in $a_1\alpha c$ oder in $a\alpha c_1$ fallen, so wird die senkrechte Ebene $\alpha\beta\gamma$ die verlängerte aαc in dem Raume $a_1\alpha c$ oder in dem andern Raume $a\alpha c_1$ treffen.

§. 72. Lehrsatz.

Sind in einem körperlichen Dreiecke die beiden Winkel einander gleich, z. B. W. a = W. c, so sind auch die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, nämlich bαa = bαc.

Beweis. Denn, sind die Winkel a und c rechte, so steht auch b senkrecht auf (Eb. a, c) (nach §. 38.); also sind auch dann die Seiten rechte Winkel. Sind aber die Winkel a und c spitze, so sind (Fig. 24.) $\beta\delta\gamma$ und $\beta\varepsilon\gamma$ ihre Neigungs-Winkel, und weil nach der Voraussetzung diese gleich sind, so sind die bei γ rechtwinklichen Dreiecke $\beta\delta\gamma$ und $\beta\varepsilon\gamma$ congruent, daher auch $\beta\delta = \beta\varepsilon$ und $\gamma\delta = \gamma\varepsilon$. Dann sind die bei δ und ε rechtwinklichen Dreiecke $\alpha\delta\gamma$ und $\alpha\varepsilon\gamma$ congruent, also auch $\alpha\delta = \alpha\varepsilon$. Und

nun auch die bei δ und ε rechtwinklichen Dreiecke αβδ und αβε congruent (weil alle drei Seiten bezüglich einander gleich sind); also ist auch W. βαδ = W. βαε d. h. die Seiten bαa und bαc sind einander gleich.

Auf ähnliche Art wird der Satz bewiesen, wenn a und c stumpf sind, nur daß dann (Fig. 26.) βαδ und βαε Neben-Winkel sind der Seiten bαa und bαc.

Anmerkung. Sind daher in einem körperlichen Dreiecke alle drei Winkel einander gleich, so sind auch alle drei Seiten einander gleich.

§. 73. Lehrsatz.

Sind zwei Seiten bαa und bαc einander gleich, so sind auch die Winkel a und c, welche diesen Seiten gegenüberstehen, einander gleich.

Beweis. Denn sobald die Seiten bαa und bαc einander gleich sind, so sind nicht bloß beide Seiten zugleich spitz, oder beide zugleich recht oder beide zugleich stumpf, sondern es müssen auch die Winkel a und c beide zugleich spitz, oder zugleich recht, oder zugleich stumpf seyn. Denn sind die Seiten bαa und bαc beide spitz oder beide stumpf, so können die Winkel a und c nur dann verschiedenartig seyn (d. h. der eine spitz und der andere stumpf, nach §. 70. NN. 1. 2.), wenn aαc spitz ist. Fiele aber γ etwa in cαa, (Fig. 36.), d. h. wäre W. a spitz, W. c dagegen stumpf, so wäre αδ < αε, also unmöglich W. βαδ = W. βαε. — Eben so kann man sich auch überzeugen, daß γ nicht in den Raum aαc, fallen, daß also nur (Fig. 24.) oder (Fig. 26.) statt haben könne.

Es mag aber die (Fig. 24.) oder die (Fig. 26.) statt finden, so folgt die Gleichheit der Winkel βδγ und βεγ aus der Congruenz der Dreiecke βδγ und βεγ, welche bei γ rechtwinklich sind, die Linie βγ gemein haben und in denen noch βε = βδ ist, weil vermöge der vorausgesetzten Gleichheit der Seiten bαa und bαc auch die bei δ und ε rechtwinklichen Dreiecke βαδ und βαε congruent sind.

Anmerkung. Sind daher in einem körperlichen Dreiecke alle drei Seiten einander gleich, so sind auch alle drei Winkel einander gleich.

§. 74. Lehrsatz.

In jedem körperlichen Dreieck steht 1) der größern Seite auch immer der größere Winkel gegenüber, und 2) dem größern Winkel auch immer die größere Seite gegenüber.

Beweis. 1) Um den ersten dieser Sätze zu erweisen, setze man zunächst (Fig. 24.) voraus, so ist nach der Voraussetzung, $baa > bac$ d. h. W. $\beta\alpha\delta >$ W. $\beta\alpha\varepsilon$ und zu beweisen, daß W. c > W. a, d. h. W. $\beta\varepsilon\gamma >$ W. $\beta\delta\gamma$. — In den Dreiecken $\beta\alpha\delta$ und $\beta\alpha\varepsilon$ ist aber $\beta\alpha = \beta\alpha$, W. δ = W. ε = R und W. $\beta\alpha\delta >$ W. $\beta\alpha\varepsilon$, also auch $\alpha\delta < \alpha\varepsilon$ und $\beta\delta > \beta\varepsilon$, und daher in den Dreiecken $\beta\gamma\delta$ und $\beta\gamma\varepsilon$, $\beta\gamma = \beta\gamma$, W. γ = W. γ = R, und $\beta\delta > \beta\varepsilon$, also auch W. $\beta\delta\gamma <$ W. $\beta\varepsilon\gamma$, d. h. W. a < W. c.

In der (Fig. 26.) wird auf dieselbe Weise bewiesen, daß wenn $baa > bac$, d. h. W. $\beta\alpha\delta >$ W. $\beta\alpha\varepsilon$ ist, dann W. $\beta\delta\gamma >$ W. $\beta\varepsilon\gamma$ seyn müsse, d. h. der Neben-Winkel von a > als der Neben-Winkel von c; also W. a < W. c.

Für die übrigen noch möglichen Fälle in den Figuren (23., 25. — 31.) muß und kann der Beweis gerade so noch geführt werden, und es findet keine andere Schwierigkeit statt, als die der Behandlung aller einzelnen möglichen Fälle.

2) Was endlich den zweiten Lehrsatz betrifft, so läßt sich solcher unmittelbar rein indirekt nachweisen. — Man kann aber auch die vorstehenden Schlüsse (in N. 1.), nur in umgekehrter Ordnung nehmen, um einen ähnlichen direkten Beweis zu erhalten.

§. 75. Lehrsatz.

In jedem körperlichen Dreiecke ist die Summe je zweier Seiten größer wie die dritte, nämlich $baa + bac > aac$ (Fig. 37.).

Beweis. Man darf natürlich den Satz bloß für den Fall beweisen, wo baa und bac jede für sich kleiner ist als die dritte aac. — Man trage baa auf aac ab, d. h. mache $aad = baa$ und beweise, daß $\beta ac > \delta ac$. — Zu dem Ende mache man $\alpha\delta = \alpha\varepsilon$ beliebig lang, nehme γ beliebig in c, ziehe $\varepsilon\gamma$ und $\delta\gamma$, und beweise, daß $\varepsilon\gamma > \delta\gamma$. Um dies zu bewerkstelligen, verlängere man die Linie $\gamma\delta$ bis sie die Kante a in β trifft und ziehe $\beta\varepsilon$. Nun sind nach der Construktion die Dreiecke $\beta\alpha\varepsilon$ und $\beta\alpha\delta$ congruent, also $\beta\varepsilon = \beta\delta$, folglich $\varepsilon\gamma > \gamma\delta$; also sind in den Dreiecken $\varepsilon a\gamma$ und $\delta a\gamma$, zwei Sei-

ten bezüglich einander gleich, die dritte aber $\varepsilon\gamma >$ als die dritte $\delta\gamma$, folglich ist auch W. $\varepsilon\alpha\gamma <$ W. $\delta\alpha\gamma$; also ist der Satz erwiesen.

§. 76. Lehrsatz.

In jedem körperlichen Dreiecke ist die Summe aller drei Seiten kleiner als vier rechte (Fig. 37.).

Beweis. Denn man lege durch das Dreieck eine Ebene $\beta\varepsilon\gamma$, welche die drei Seiten in den Linien $\beta\gamma$, $\beta\varepsilon$ und $\gamma\varepsilon$ schneidet. In den entstehenden Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\varepsilon$ und $\alpha\gamma\varepsilon$ machen nun alle neun Winkel zusammen sechs rechte aus. Weil aber auch β, γ, ε Spitzen dreier körperlichen Dreiecke sind, so hat man nach dem nächst-vorhergehenden Satze:

$$\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\gamma > \gamma\beta\varepsilon$$
$$\alpha\varepsilon\beta + \alpha\varepsilon\gamma > \beta\varepsilon\gamma$$
$$\alpha\gamma\varepsilon + \alpha\gamma\beta > \beta\gamma\varepsilon.$$

Mithin, wenn man addirt, die Summe der sechs Winkel

$$\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\gamma + \alpha\varepsilon\beta + \alpha\varepsilon\gamma + \alpha\gamma\varepsilon + \alpha\gamma\beta > \gamma\beta\varepsilon + \beta\varepsilon\gamma + \beta\gamma\varepsilon$$

d. h. größer als zwei rechte. Daher ist die Summe der drei übrigen Winkel um α herum, d. h. die Summe der drei Seiten, kleiner als 4 rechte Winkel, in so fern alle neun Winkel sechs rechte ausmachen müssen.

Anmerkung. Derselbe Satz gilt auch für ein beliebiges körperliches Viel-Eck und wird auf dieselbe Art auch bewiesen. In einem körperlichen n Eck ist also die Summe aller n Seiten desselben, ebenfalls kleiner als vier rechte.

§. 77. Zusatz.

Daher ist in jedem körperlichen Dreiecke die Summe aller drei Winkel allemal größer wie zwei rechte und, wie wir oben schon gesehen haben (§. 64. Anmerk. 2.), kleiner als 6 rechte.

Denn man bilde das Ergänzungs-Dreieck, so macht die Summe der drei Winkel des gegebenen, allemal sechs rechte aus, weniger der Summe der drei Seiten des Ergänzungs-Dreiecks (§. 66. N. 3.); und weil letztere Summe immer kleiner als vier rechte Winkel ist, so bleibt die erstere Summe allemal größer als zwei rechte übrig.

Anmerkung. So ließe sich leicht auch erweisen, daß

in einem körperlichen n Eck die Summe aller n Winkel größer seyn müsse als 2n — 4 rechte Winkel, während sie kleiner als 2n rechte Winkel ist; sobald man nämlich, wie dies hier von uns ein für allemal angenommen worden ist, keine andern (Flächen-) Winkel als hohle, zuläßt.

§. 78. Lehrsatz.

Sind in zwei körperlichen Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bezüglich einander gleich, so sind beide Dreiecke congruent, wenn die gleichen Stücke auch in derselben Richtung um die Spitze herumliegen; im entgegengesetzten Falle ist aber doch das eine dieser Dreiecke dem Scheitel-Dreieck des andern congruent, und in beiden Fällen sind die in derselben Ordnung folgenden Seiten und Winkel alle bezüglich einander gleich.

Beweis. Denn legt man die beiden Dreiecke (entweder die beiden gegebenen, oder das eine gegebene und das Scheitel-Dreieck des andern gegebenen), welche die gleichen Stücke auch in derselben Richtung um die Spitze herumliegend haben, mit einer gleichen Seite in einander, so decken sich zwei Paare Kanten. Weil aber auch ein Winkel gleich ist, so fallen auch die zweiten Seiten auf einander, und weil diese gleich sind, auch die 3te Kante. Also decken sich die beiden Dreiecke.

Und weil Scheitel-Dreiecke gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, in derselben Ordnung aber in verschiedner Richtung um die Spitze herumliegend, so folgert dann auch der letzte Theil des Lehrsatzes.

§. 79. Zusatz.

Sind in zwei körperlichen Dreiecken zwei Winkel und die eingeschlossene Seite einander gleich, so sind entweder die Dreiecke congruent, oder es ist doch das eine davon dem Scheitel-Dreiecke des andern congruent, und in jedem Falle sind alle Seiten und alle Winkel in derselben Ordnung auf einander folgend einander gleich.

Beweis. Wird entweder durch Deckung (wie im vorhergehenden §. 78.) geführt; oder auch dadurch, daß man sich von jedem das Ergänzungs-Dreieck

denkt. Diese Ergänzungs-Dreiecke haben nämlich zwei gleiche Seiten und den eingeschlossenen gleichen Winkel, sind also (nach §. 78.) congruent oder das eine doch dem Scheitel-Dreiecke des andern; folglich auch die gegebenen Dreiecke congruent, oder das eine doch dem Scheitel-Dreiecke des andern (nach §. 66. N. 4.).

§. 80. Lehrsatz.

Zwei körperliche Dreiecke sind congruent, oder das eine davon ist doch dem Scheitel-Dreieck des andern congruent, wenn alle drei Seiten bezüglich einander gleich sind.

Beweis. Man beweise den Satz analog dem in der ebenen Geometrie (E. G. §. 31.) für ebene Dreiecke aufgestellten; denke sich nämlich die gegebenen oder das eine gegebene und das Scheitel-Dreieck des andern gegebenen (je nachdem es für das eine oder das andere Paar möglich wird) mit einer gleichen Seite so untereinander gelegt, daß ein körperliches Viereck entsteht, welches durch eine Diagonal-Ebene in zwei gleichschenkliche körperliche Dreiecke zertheilt werden kann. In jedem der letztern sind nun die den gleichen Seiten gegenüber liegenden Winkel einander gleich, also auch im Viereck diese zwei gegenüber stehenden Winkel einander gleich (als Summen oder als Differenzen gleicher Theile). Unsere Dreiecke haben daher auch einen gleichen Winkel und sind deshalb (nach §. 78.) congruent, oder es ist doch das eine dem Scheitel-Dreiecke des andern congruent.

§. 81. Zusatz.

Haben zwei körperliche Dreiecke bezüglich drei gleiche Winkel, so sind sie congruent, oder es ist doch das eine dem Scheitel-Dreiecke des andern congruent.

Denn die Ergänzungs-Dreiecke haben dann gleiche Seiten, sind also congruent; folglich ist auch unser Lehrsatz außer Zweifel (§. 66. N. 4.).

§. 82. Lehrsatz.

Sind in zwei körperlichen Dreiecken zwei Seiten bezüglich einander gleich und ein Winkel, welcher der einen Seite gegenüber steht, so sind die Dreiecke selber congruent oder das eine ist doch dem Scheitel-Dreieck des andern congruent, so oft noch die Summe der, der andern gleichen Seite in beiden Dreiecken

gegenüber stehenden Winkel größer oder kleiner als zwei rechte ist (d. h. nicht gerade zwei rechte ist.).

Ist also vorausgesetzt (Fig. 38.):

Seite $a\alpha c$ = Seite $a'\alpha'c'$

Seite $a\alpha b$ = Seite $a'\alpha'b'$

Winkel c = Winkel c'

und $\mathfrak{W}.\,b + \mathfrak{W}.\,b' \gtrless 2R$,

so ist nothwendig

$$\Delta(a, b, c) \overline{\overline{\cong}} \Delta(a', b', c'),$$

wenn in beiden Dreiecken die Kante b und b' in Bezug auf die in derselben Ebene gedachten $a\alpha c$, $a'\alpha'c'$ nach oben zu liegen, oder beide nach unten. (Läge aber b nach oben zu, dagegen b' nach unten zu, so wäre doch das eine Dreieck dem Scheitel-Dreiecke des andern congruent).

Beweis. Denn man denke sich beide Dreiecke mit ihren gleichen Seiten $a\alpha c$ und $a'\alpha'c'$, gehörig in einander gelegt, so decken sich die Kanten a und a', desgleichen die Kanten c und c', so wie die Spitzen α und α'. Da nun $\mathfrak{W}.\,c = \mathfrak{W}.\,c'$ ist, so fallen die Ebenen $b\alpha c$ und $b'\alpha'c'$ auf einander *), und die Kante b' fällt entweder auf b oder doch in die Ebene $b\alpha c$, entweder in sie selbst oder doch in ihre Verlängerung, von α aus. Fiele nun b' in d, so würden die Kanten a, b, d ein gleichschenkliches körperliches Dreieck bilden (weil $a\alpha b = a'\alpha'b' = a\alpha d$) und in diesem wären die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber stehen, nämlich b und bda einander gleich; und weil $\mathfrak{W}.\,bda + \mathfrak{W}.\,adc = 2R$, so wäre auch $\mathfrak{W}.\,b + \mathfrak{W}.\,adc = 2R$, d. h. $\mathfrak{W}.\,b + \mathfrak{W}.\,b' = 2R$ (in so fern das Dreieck $\Delta(a, d, c)$ von dem Dreieck $\Delta(a', b', c')$ nicht verschieden ist). Und weil das letztere Resultat der Voraussetzung widerspricht, so kann b' nicht in d fallen. — Aber gerade so würde erhellen, daß b' nicht über b in e

---

*) Dieses Aufeinanderfallen wäre nicht nothwendig, wenn nicht beide Kanten b und b' zugleich nach oben oder zugleich nach unten zu giengen. Gienge daher die eine Kante b nach oben, die andere b' aber nach unten, so müßte man von dem einen Dreiecke das Scheitel-Dreieck nehmen, damit wieder beide Kanten nach oben oder beide nach unten zu giengen.

fallen könne. — Also muß b' auf b selbst fallen und die Dreiecke sind deshalb congruent.

Note. Der Anfänger mag bemerken, daß dieser Beweis genau so geführt ist, wie der des analogen Satzes für ebene Dreiecke (E. G. §. 31.).

§. 83. Zusatz.

Sind in zwei körperlichen Dreiecken zwei Winkel bezüglich einander gleich und noch eine Seite, die dem einen gleichen Winkel gegenüber liegt, so sind beide Dreiecke congruent, oder es ist doch das eine dem Scheitel-Dreiecke des andern congruent, wenn nur die Summe der beiden Seiten, welche in jedem Dreiecke dem andern gleichen Winkel gegenüber liegen, größer oder kleiner ist als 2 rechte Winkel (d. h. nicht gerade zweien rechten Winkeln gleich ist).

Denn die Ergänzungs-Dreiecke haben dann zwei gleiche Seiten, einen gegenüber liegenden gleichen Winkel und die Summe der andern gegenüber liegenden Winkel beträgt dann ebenfalls mehr oder weniger als 2 rechte. Die Ergänzungs-Dreiecke sind also congruent oder das eine doch dem Scheitel-Dreiecke des andern. Also sind auch die gegebenen Dreiecke congruent, oder das eine doch dem Scheitel-Dreiecke des andern.

Anmerkung. Wenn in den beiden letztern Sätzen auch die vierte Bedingung fehlt, so können die Dreiecke doch congruent seyn; aber es ist nicht nothwendig, daß sie congruent sind, und sie können daher eben so gut auch nicht lauter gleiche Stücke haben.

Schluß-Anmerkung.

Man könnte in diesem Kapitel einen ganz andern Gang nehmen. Uebersieht man nämlich die sechs Sätze der Congruenz der körperlichen Dreiecke, so bemerkt man leicht, daß sie nichts voraussetzen als: 1) den Begriff des Ergänzungs-Dreieckes, der gleich zu Anfang des Kapitels gegeben werden kann, und 2) den Satz, daß in einem körperlichen Dreiecke gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber stehen. Man konnte daher in der Lehre der körperlichen Dreiecke beinahe denselben Gang verfolgen, welcher in der ebenen Geometrie (E. G. §§. 29.—31.) für ebene Dreiecke verfolgt sich findet. Man konnte die ersten beiden Sätze der Congruenz zuerst nehmen und er-

weisen. Daß dann gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber stehen, konnte man dadurch beweisen, daß man das Dreieck durch eine Ebene, welche durch die Kante b gelegt, den Winkel b halbirt, in zwei Dreiecke zerlegt sich denkt, von denen das eine dem Scheitel-Dreiecke des andern congruent ist, ganz ähnlich dem Beweis der (E. G. §. 29.). Dann konnten die übrigen Sätze der Congruenz der körperlichen Dreiecke sogleich folgen; so wie der Satz, daß gleichen Winkeln in einem Dreiecke auch gleiche Seiten gegenüber stehen, entweder mit Hülfe der Ergänzungs-Dreiecke aus seinem umgekehrten, oder auch aus der Congruenz derjenigen Dreiecke gefolgert werden kann, die durch eine, den Winkel b halbirende Ebene entstehen, oder vielmehr aus der Congruenz des einen dieser Dreiecke mit dem Scheitel-Dreiecke des andern. — Hierauf kann der Satz folgen, daß in jedem körperlichen Dreiecke die Summe je zweier Seiten größer seyn müsse, als die dritte, mit demselben Beweis wie er (§. 75.) hier vorsteht; um daraus dann den Satz beweisen zu können, daß dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber stehe. Dieser letztere Beweis wird aber nun dadurch geführt, daß man von dem größern Winkel mittelst einer durch seine Kante gelegten Ebene ein Stück abschneidet, welches dem kleinern Winkel gleich ist. Dadurch wird das Dreieck in Zweie zerlegt (und die dem größern Winkel gegenüber stehende Seiten in zwei Seiten), von denen das eine Dreieck gleichschenklich ist und in dem andern die Summe zweier Seiten größer wie die dritte (dem kleinern Winkel im gegebenen Dreieck gegenüber stehende), während die Summe dieser beiden Seiten, wegen des abgeschnittenen gleichschenklichen Dreiecks nichts anderes ist, als die dem größern Winkel gegenüber stehende Seite im gegebenen Dreieck. — — Daß dann der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber stehe, in jedem körperlichen Dreieck, folgt zuletzt rein indirekt, oder auch direkt mittelst der Ergänzungs-Dreiecke.

Die übrigen Sätze können nun leicht in dieses Netz eingereihet werden, jeder an der Stelle, wo er sich am natürlichsten anschließt; und dann wird in allen den hier angeführten Sätzen die Construktion der Neigungs-Winkel und die davon unzertrennbare Aufzählung aller möglichen einzelnen Fälle dieser Construktion völlig unnöthig, so daß dieser letztere, hier bloß angedeutete Weg, in vieler Beziehung der einfachere und als solcher dem von uns hier im Kapitel selbst wirklich betretenen, vorzuziehen seyn dürfte.

Uns liegt aber daran, dieselbe Sache mehrseitig zu behandeln und besonders mit den innern Construktionen der verschiedenen Körper recht vertraut zu werden, und so ist deshalb auch hier der Weg im Texte vorgezogen worden.

Körperliche Geometrie.

Drittes Kapitel.

Von den völlig begrenzten Körpern. Insbesondere von den Pyramiden, Prismen, Kegeln und Cylindern.

§. 84. Erklärung.

Die senkrechte Linie von der Spitze einer Pyramide auf die Grund-Ebene derselben gefällt, sie mag die Grundfläche selbst oder ihre Verlängerung treffen, heißt die Höhe der Pyramide (§. 63. R. 1.).

Eine Pyramide heißt rechtwinklich oder gleichseitig, wenn ihre Grundfläche eine im Kreise beschriebene geradlinige Figur ist, und die Höhe gerade in den Mittelpunkt dieser Figur trifft. In jedem andern Falle ist die Pyramide schief.

Die rechtwinkliche Pyramide wird noch eine reguläre genannt, wenn ihre Grundfläche zu gleicher Zeit eine reguläre Figur ist.

Wird in einer Pyramide, z. B. ABCDEF (Fig. 39.) eine Ebene parallel mit der Grundfläche durchgelegt, z. B. abcde, so heißt das zwischen diesen parallelen Ebenen liegende Stück eine abgekürzte Pyramide, und die obere abgeschnittene Pyramide abcdeF die Ergänzungs-Pyramide.

§. 85. Zusätze.

1) Die Seitenflächen einer jeden nseitigen Pyramide sind Dreiecke, die Grundfläche ist ein nEck.

2) Jede nseitige Pyramide wird durch Diagonal-Ebenen (gebildet aus den Diagonalen der Grundfläche und den an die Endpunkte stoßenden Seiten-Kanten der Pyramide) in eben so viele dreiseitige Pyramiden zerlegt, als die Grundfläche durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden kann.

3) In einer rechtwinklichen oder gleichseitigen Pyramide sind die Seitenkanten alle einander gleich, weil solche als schiefe Linien existiren, deren Fuß-Punkte von dem Fuß-Punkte der senkrechten gleichweit abstehen, in so fern erstere nach der Definition in dem Umfange eines Kreises liegen sollen (nach §. 13. N. 3.).

4) Sind die Seiten-Kanten alle einander gleich, so ist die Pyramide eine rechtwinkliche, weil dann (nach §. 13. N. 2.) die Fuß-Punkte derselben von dem Fuß-Punkte der senkrechten Linie (der Höhe) gleich weit abstehen müssen.

5) In der regulären Pyramide sind die Seitenflächen congruente Dreiecke, weil sie bezüglich drei gleiche Seiten haben.

6) Und sind die Seitenflächen lauter congruente und gleichschenkliche Dreiecke, so ist die Pyramide eine reguläre.

Denn da alle Seiten-Kanten, nach der Voraussetzung einander gleich sind, so ist die Grundfläche eine im Kreise beschriebene Figur; und da die Seiten der Grundfläche auch noch einander gleich sind, wie aus der Congruenz aller Seitenflächen unmittelbar folgert, so ist diese Figur regulär.

§. 86. Lehrsatz.

Wird eine Pyramide, z. B. ABCDEF (Fig. 39.) von einer Ebene parallel mit der Grundfläche geschnitten, so entsteht eine neue, abgeschnittene Pyramide, welche die Grundfläche abcde hat; und man erkennt sogleich:

1) die Höhe FH steht auf beiden Grundflächen in H und h zugleich senkrecht;

2) die Seiten der Grundflächen sind mit den abgeschnittenen Kanten und auch mit den Höhen proportionirt, nämlich

$$AB:ab = AF:aF = HF:hF = \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.};$$

3) die Grundflächen ABCDE und abcde sind ähnliche Figuren,

4) und verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der homologen Seiten, auch wie die Quadrate der homologen Kanten, und noch wie die Quadrate der Höhen, nämlich

$$ABCDE:abcde = BC^2:bc^2 = AF^2:aF^2 = FH^2 = Fh^2 = \text{ꝛc.}$$

Beweis. Die N. 1. des Satzes folgt unmittelbar aus §. 21. — Die beiden parallelen Ebenen ABCDE und abcde werden von den Seitenflächen (nach §. 42. N. 1.) in parallelen Durchschnittslinien AB und ab, BC und bc, CD und cd, ꝛc. ꝛc. geschnitten, also sind ähnlich die Dreiecke ABF und abF, desgleichen BCF und bcF, ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc., während die von den parallelen Linien gebildeten Winkel (nach §. 11.) einander gleich sind, nämlich

$$ABC = abc,\ BCD = bcd,\ CDE = cde,\ \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

In den ähnlichen Seiten-Dreiecken hat man nun

$$AB:ab = BF:bF = BC:bc = CF:cF = CD:cd = DF:dF = DE:de = EF:eF = \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.};$$

also haben ABCDE und abcde nach der Ordnung gleiche Winkel und die solche einschließende Seiten sind proportionirt; die Grundflächen sind also ähnlich nach (E. G. §. 48.).

Denkt man sich noch AH und ah gezogen, so sind solche Linien als die Durchschnittslinien anzusehen, der beiden parallelen Grundflächen mit der Ebene AFH, also sind sie parallel und $\triangle AFH \sim \triangle aFh$ und daraus folgern die Proportionen der (N. 3.), während die Proportionen der (N. 4.) aus den beiden Sätzen unmittelbar hervorgehen, einmal: daß sich ähnliche Figuren verhalten wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten (E. G. §. 68.) und dann: daß wenn vier Linien in Proportion stehen, sofort auch ihre Quadrate in Proportion stehen müssen.

Anmerkung. Zwei Pyramiden, die so in einander liegend gedacht werden können, wie hier (Fig. 39.) die beiden Pyramiden ABCDEF und abcdeF gedacht worden (so daß dann auch ABCDE und abcde mit einander parallel laufen, und

alles eben Entwickelte von ihnen gilt), nennt man auch ähnliche Pyramiden.

§. 87. Zusatz.

1) Haben daher zwei Pyramiden ABCD und EFGHK (Fig. 40.) gleiche Höhen und werden sie in gleichen Abständen von den Grundflächen durch parallele Ebenen abc und efgh geschnitten, so verhalten sich beide Grundflächen zu einander, wie die Durchschnitts-Figuren, nämlich

$$ABC : EFGH = abc : efgh.$$

Denn jede Grundfläche verhält sich zu der mit ihr parallelen Durchschnitts-Figur, wie das Quadrat der ganzen Höhe zu dem Quadrate der abgeschnittenen Höhe, und die ganzen Höhen sowohl als wie die abgeschnittenen Höhen sind nach der Voraussetzung einander gleich.

2) Haben dieselben Pyramiden auch noch die Grundflächen gleich, so sind auch die Durchschnitts-Figuren einander gleich,

d. h. ist noch $\Delta ABC = \square EFGH$,

so ist auch $\Delta abc = \square efgh$.

§. 88. Lehrsatz.

Zwei Pyramiden sind congruent, wenn die Grundflächen und ein Paar Seitenflächen congruent sind und diese Seitenflächen mit den Grundflächen nach einer und derselben Richtung hin, an homologen Grundkanten gleiche Winkel bilden.

Beweis fällt von selbst in die Augen, weil bei dem in einander legen ein Paar Stücke nach dem andern sich decken muß.

Anmerkung. Es ist auch leicht, noch mehr Lehrsätze der Congruenz der Pyramiden aufzustellen, welche jedoch hier ihrer höchst seltenen Anwendbarkeit wegen, außer Betracht bleiben mögen.

§. 89. Erklärung.

Wird eine gerade Linie SX, welche durch einen Punkt S

(Fig. 41.) und einen Punkt A einer Kreislinie AEDB, in deren Ebene S selbst nicht liegt, hindurchgeht, dergestalt herumbewegt, daß sie beständig in dem Punkte S bleibt, nach und nach aber alle Punkte der Kreislinie AEDB durchläuft, so beschreibt solche eine krumme Fläche, welche mit dem Kreise AEDB einen körperlichen Raum völlig begrenzt und denjenigen Körper bildet, welcher Kegel (Conus) genannt wird. — Der Punkt S heißt die Spitze, der Kreis ABDE die Grundfläche, die krumme von SX beschriebene Fläche der Mantel des Kegels; die Linie SC von der Spitze nach dem Mittelpunkte C der Grundfläche gezogen, wird die Axe des Kegels genannt und der Kegel selbst heißt ein senkrechter, rechtwinklicher oder gleichseitiger, wenn die Axe senkrecht auf der Grundfläche steht; im Gegentheil wird er ein schiefer oder ein ungleichseitiger genannt. Die Höhe des Kegels endlich ist die senkrechte Linie, welche von der Spitze nach der Grundfläche oder nach ihrer Verlängerung herabgefällt werden kann. Jede gerade Linie von S nach irgend einem Punkte in dem Umfange des Kegels gezogen, wird die Seite des Kegels genannt.

Und wird eine Ebene parallel mit der Grundfläche durchgelegt, so heißt das untere Stück ein abgekürzter Kegel, das obere dagegen der Ergänzungs-Kegel. Die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels heißt auch Kegelzone.

Note. Weil man sich die Pyramide eben so beschrieben denken kann, wie den Kegel (nämlich dadurch, daß man sich eine gerade Linie denkt, welche beständig durch die Spitze hindurchgeht, nach und nach aber den ganzen Umfang der Grundfläche durchläuft), so ist ein Kegel als eine Pyramide anzusehen, von unendlich vielen Seitenflächen, in so fern man nämlich die Grundfläche des Kegels als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten annehmen kann.

Was demnach von jeder n seitigen Pyramide gilt, wie groß auch die Zahl n gedacht werden mag, das kann, dieser Ansicht zu Folge, auch für den Kegel geltend angenommen werden.

Es gewährt aber diese Ansicht im Praktischen manche Bequemlichkeit und es mag solche daher nicht unberücksichtigt bleiben, wenn wir auch in dem Folgenden den Kegel selbstständig behandeln.

§. 90. Zusatz.

Wird ein Kegel durch eine Ebene geschnitten, welche durch seine Spitze geht, so ist die Durchschnitts-Figur ein geradliniges ebenes Dreieck; und geht diese Ebene noch durch den Mittelpunkt der Grundfläche, so liegt die Axe in diesem Dreiecke und halbirt solches, in so fern sie die Grundlinie desselben halbirt.

§. 91. Zusatz.

In einem senkrechten Kegel sind die Seiten alle einander gleich (nach §. 13. N. 3.).

§. 92. Zusatz.

Sind in einem Kegel drei Seiten einander gleich, so ist der Kegel senkrecht, also sind dann auch alle Seiten einander gleich.— Ist z. B. SE=SB=SD (Fig. 41.), so steht SC senkrecht auf der Grundfläche, wenn C der Mittelpunkt derselben ist.

Denn es sind die Dreiecke SCE, SCB und SCD, der Voraussetzung zu Folge, congruent, also ist W. SCE=W. SCB=W. SCD. So oft aber eine Linie SC mit dreien Linien CD, CE und CB in einer Ebene gleiche Winkel macht, so oft muß sie auf dieser Ebene senkrecht stehen, nach (§. 18. N. 2.).

§. 93. Zusatz.

Ein senkrechter Kegel-Mantel ist allemal einem Kreis-Ausschnitt gleich, dessen Radius die (allenthalben dieselbe bleibende) Seite des Kegels, dessen Bogenlänge aber dem Umfange der Grundfläche gleich ist.

Note. Man kann sich den senkrechten Kegel mit einer Seite auf eine Ebene gelegt und um seine Spitze aufgerollt denken, so wird sich der Mantel in der Ebene abwickeln und den gedachten Kreis-Ausschnitt beschreiben.

§. 94. Lehrsatz.

Wird ein Kegel parallel mit der Grundfläche durch eine Ebene geschnitten, so ist:

1) die Durchschnitts-Figur abde ein Kreis;

2) die abgeschnittenen Seiten der Kegel verhalten sich wie die Durchmesser, auch wie die Halbmesser der Grundflächen, auch wie die Höhen, und auch wie die Axen, nämlich (Fig. 42.):

$$AS:aS = AB:ab = AC:ac = SH:Sh = SC:Sc = \text{ꝛc. ꝛc.},$$

wo SH und Sh die Höhen sind; endlich

3) verhalten sich die Kreisflächen, wie die Quadrate der eben genannten Stücke, nämlich

$$ABDE:abde = AB^2:ab^2 = SC^2:Sc^2 = SH^2:Sh^2 = SB^2:Sb^2 = \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

Beweis. Denn es sind ähnlich die Dreiecke SAC und Sac, SAH und Sah, SCH und Sch, ꝛc. ꝛc. Also hat man

$$AC:ac = SC:Sc = EC:ec = \text{ꝛc. ꝛc.};$$

und es ist daher, weil $AC = EC$ ist, auch ac und ec. — Weil aber eben so von je zwei Linien, wie hier von ac und ec, bewiesen werden kann, daß sie einander gleich sind, so ist abcde eine Kreislinie und c der Mittelpunkt derselben. — Es verhalten sich aber zwei Kreisflächen, wie die Quadrate ihrer Durchmesser, also ꝛc. ꝛc. ꝛc. (Vergl. §. 86.).

Note. Wird ein Kegel überhaupt durch eine Ebene geschnitten, so ergeben sich, je nachdem diese Ebene gelegt wird, außer den genannten Durchschnitts-Figuren, auch noch andere krumme Linien, welche sich in drei Hauptarten, unter dem Namen der Ellipse, Parabel und Hyperbel zusammenfassen lassen, und vorzugsweise Kegelschnitte genannt werden, zuweilen auch algebraische Linien der zweiten Ordnung. — Es ist übrigens dem Kegel gar nicht eigenthümlich, diese krummen Linien vorzugsweise zu liefern, sondern es giebt unendlich viele Körper, von dem Kegel verschieden, welche durch Ebenen geschnitten, dieselben Durchschnitts-Figuren geben, die man deshalb Kegelschnitte nannte, weil man sie bei dem Kegel zuerst bemerkt hat. — Da übrigens die Kegelschnitte, oder besser, die algebraischen Linien der zweiten Ordnung, in der Physik (namentlich aber in der Astronomie) und auch in den Künsten häufige Anwendung finden, so ist ihre Lehre von besonderer Wichtigkeit und deshalb auch besonders zu betreiben *).

Anmerkung. Zwei Kegel, die so in einander gelegt wer-

---

*) Eine nähere Kenntniß dieser Kegelschnitte kann man aus der als Forsetzung dieser Elementar-Mathematik erschienenen Schrift: „die analitische Geometrie in ihren Elementen. Berlin 1828" sich verschaffen.

den können, daß die Mäntel in einander fallen und die Grundflächen mit einander parallel werden, nennt man auch ähnliche Kegel.

§. 95. Lehrsatz.

Zwei Kegel sind congruent, wenn die Grundflächen congruent sind und die Axen gleich, und wenn letztere auch noch gegen die Grundflächen gleich geneigt sind.

Beweis fällt in die Augen, denn die Körper decken sich, d. h. fallen bei einem schicklichen in einanderlegen mit allen ihren Grenzen zusammen.

§. 96. Lehrsatz und Erklärung.

Legt man durch einen Punkt E der Grundfläche eines Kegels eine Tangente EF (Fig. 42.) an die Kreislinie, so wird die Ebene FES den Kegel bloß in der Seite SE treffen, sonst in keinem Punkte weiter, wenn sie auch nach allen Seiten hin in's Unendliche verlängert gedacht wird. — Eine solche Ebene wird Tangential-Ebene (Berührungs-Ebene) des Kegels genannt.

Beweis. Denn, würde diese Ebene FES den Kegel noch in einem Punkte g treffen, so wären, wenn durch g die mit der Grundfläche parallele Ebene agebd hindurchgelegt wird, FE und ge die Durchschnittslinien der parallelen Ebenen mit FES, also selber mit einander parallel. Legt man nun durch e noch die Tangente ef an die Kreislinie agebd, so wird solche ebenfalls mit EF parallel laufen, weil cef und CEF gleiche Winkel sind (nämlich rechte) und ce mit CE parallel geht. Also giengen durch einen Punkt e mit einer Linie EF zwei verschiedene Parallelen, nämlich die Sehne eg und die Tangente ef, welches nicht möglich. Also ist es auch nicht möglich, daß die Ebene FES den Kegel-Mantel noch in einem Punkte außerhalb SE treffe.

§. 97. Zusatz.

Durch die Seite SE eines Kegels kann nur eine einzige Tangential-Ebene gelegt werden.

§. 98. Zusatz.

Schneidet irgend eine Ebene die Seite SE in P (Fig. 42.) und die Tangential=Ebene FES in irgend einer Richtung PQ, so trifft diese Durchschnitts=Linie PQ den Kegel auch in keinem Punkte weiter, als in dem P, und jede solche Linie PQ wird daher Tangential=Linie (Berührungs=Linie oder schlechtweg Tangente) des Kegels genannt.

§. 99. Erklärung.

Ein gemeines Prisma (mit zweien parallelen Grundflächen §. 63. N. 2.) heißt senkrecht, wenn eine Seiten=Kante auf den Grundflächen senkrecht steht; im Gegentheil heißt es schief. Der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen von einander, — das Prisma mag ein schiefes oder ein senkrechtes seyn, — wird endlich die Höhe des Prisma genannt.

§. 100. Zusatz.

Alle Seiten=Kanten eines Prisma laufen mit einander parallel. Steht daher eine davon senkrecht auf den Grundflächen eines gemeinen Prisma, so stehen sie alle auf denselben senkrecht, und jede Seiten=Kante ist dann zugleich immer die Höhe des Prisma. Steht aber eine Seiten=Kante schief auf der Grundfläche, so stehen sie alle schief.

Note. Im schiefen Prisma ist die Höhe allemal kleiner wie irgend eine der Seiten=Kanten.

§. 101. Zusatz.

Die Seitenflächen eines gemeinen Prisma sind Parallelogramme, und im senkrechten Prisma nothwendig Rechtecke; daher sind auch alle Seiten=Kanten einander gleich.

Die Grundflächen dagegen sind Dreiecke, Vierecke, n Ecke, jedoch allemal beide einander congruent, weil sie von gleichen Seiten und gleichen Winkeln gebildet werden. Dasselbe gilt von irgend zwei, einen prismatischen Raum begrenzenden parallelen Ebenen, also auch, wenn noch eine beliebige Ebene parallel mit der Grundfläche durchgelegt wird.

§. 102. Zusatz.

Im senkrechten Prisma stehen auch alle Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche (nach §. 35.).

Und stehen zwei auf einander folgende, sich in einer Kante schneidende Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen, so ist das Prisma ein senkrechtes (§. 38.).

Eben so ist das Prisma ein senkrechtes, wenn es zwei in einer Kante sich schneidende Seitenflächen hat, welche Rechtecke sind, weil dann die, beiden Rechtecken gemeinschaftliche Kante, auf zweien auf einander folgenden Grund-Kanten, also auch auf der Grund-Ebene selbst senkrecht steht.

Note. Ein gemeines Prisma kann aber wohl zwei auf der Grundfläche senkrechte Seitenflächen haben, ohne daß es deshalb nothwendig ein senkrechtes seyn müßte, sobald nämlich diese beiden Seitenflächen parallel sind. Ein schiefes Prisma kann aber auch zwei Seitenflächen haben, welche Rechtecke sind.

§. 103. Lehrsatz.

Zwei gemeine Prismen sind congruent, wenn sie congruente Grundflächen haben, eine congruente Seitenfläche, und wenn diese Seitenfläche mit der Grundfläche, an homologen Seitenlinien nach derselben Richtung hin, denselben Flächenwinkel bildet.

Beweis ergiebt sich durch unmittelbares in einander legen der Prismen mit ihren congruenten Theilen, wo dann leicht in die Augen fällt, daß alle Grenzen in einander fallen müssen.

§. 104. Erklärung.

Ein gemeines Prisma heißt in's Besondere ein Parallelepipedum, wenn die Grundfläche ebenfalls Parallelogramme sind; und das Parallelepiped wird rechtwinklich genannt, wenn die Grundflächen und auch die Seitenflächen Rechtecke sind. Im Gegentheil ist es schiefwinklich. — Dasjenige rechtwinkliche Parallelepiped, dessen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate sind, heißt in's Besondere Kubus oder Würfel (auch zuweilen Hexaëder).

§. 105. Zusätze.

1) Da ein Parallelepiped nur eine besondere Gattung des gemeinen Prisma ist, so gilt von ihm, was von allen gemeinen Prismen zugleich gilt. Und da ein Würfel nur eine besondere Gattung von Parallelepiped ist, so gilt von ihm, was von allen gemeinen Prismen, und auch noch, was von allen Parallelepipeden gilt.

2) In jedem Parallelepided sind die gegenüberstehenden Seitenflächen parallel und congruent.

Denn diese Ebenen werden von Winkeln gebildet, welche parallele Schenkel haben; und die Seitenflächen selbst haben, eben wegen der allenthalben parallelen Kanten, lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel.

3) Zwei rechtwinkliche Parallelepipede sind congruent, wenn die beiden Kanten der Grundfläche und die Kante, welche die Höhe bildet, in beiden dieselben sind (nach §. 103.).

Ein rechtwinkliches Parallelepiped ist daher durch seine drei auf einander senkrecht stehenden Kanten völlig bestimmt und gegeben.

§. 106. Lehrsatz.

Stehen zwei Parallelepipeda ABCDH und ABCDL (Fig. 43.) auf einer und derselben Grundfläche ABCD und liegen ihre zweiten Grundflächen EFGH und JKLM, desgleichen die Seitenflächen ABEF und ABJK in einer und derselben Ebene, so sind diese Parallelepipeda einander gleich.

Beweis. Denn es liegen dann die Seitenflächen CDGH und CDML, da sie beide mit ABEFJK parallel laufen und durch dieselbe Linie CD gehen, ebenfalls in einer und derselben Ebene, und es sind also dann zwei dreiseitige Prismen HEADJM und FGBCKL vorhanden, welche (nach §. 103.) congruent, also auch einander gleich sind. Nimmt man von beiden das gemeinschaftliche Prisma FGPQJM weg, und addirt man zu beiden Resten das gemeinschaftliche Prisma ADPQBC wiederum hinzu, so ergiebt sich die Gleichheit der Parallelepipeden ABCDEFGH und ABCDJKLM.

In den beiden andern Figuren, die noch entstehen können, folgt aber der Satz noch einfacher.

§. 107. Zusatz.

Daraus folgt sogleich, daß auch zwei Parallelepipeda einander gleich seyn müssen, welche auf einer gemeinschaftlichen Grundfläche ABCD stehen und deren zweite Grundflächen EFGH und JKLM in einer und derselben Ebene liegen (Fig. 44.).

Denn denkt man sich die Ebenen AF und DG, desgleichen die Ebenen AM und BL, endlich die Ebene EL gehörig verlängert, so werden das erste Paar der parallelen Ebenen AF und DG und das zweite Paar paralleler Ebenen AM und BL sich schneiden und mit der oberen Ebene EL ein drittes Parallelepipedum bilden, welches nach dem vorstehenden Lehrsatze jedem dieser beiden gleich seyn muß, weshalb diese beiden selbst einander gleich seyn müssen.

§. 108. Zusatz.

Daraus folgt aber wieder, daß zwei beliebige Parallelepipeda einander gleich sind, wenn sie congruente Grundflächen haben und gleiche Höhen.

Denn sie können dann so gestellt werden, daß die Gleichheit (nach §. 107.) statt finden muß.

§. 109. Zusatz.

Eben deshalb sind aber nun auch zwei beliebige gemeine Prismen P und P_1 einander gleich, welche gleiche Grundflächen G, G_1 und gleiche Höhen H, H_1 haben (wenn auch die Seitenzahl in beiden verschieden ist).

Denn gleiche Grundflächen sind solche, in denen ein gemeinschaftliches (größeres oder noch so kleines) Quadrat gleich vielmal enthalten ist. Denkt man sich nun diese Quadrate auf den Grundflächen gebildet und durch die Ecken derselben Linien parallel mit den Seiten-Kanten gezogen, so werden beide Prismen P und P_1 in lauter Parallelepipeda zerlegt, deren Grundflächen diese Einheits-Quadrate sind, und die alle einerlei Höhe haben, die also (nach §. 107.) alle einander gleich seyn müssen. Und in beiden Prismen

P und P_1 kommen diese gleichen Parallelepipeda gleich vielmal vor; also sind die Prismen P und P_1 selber einander gleich (nach I. Bd. S. 89.).

§. 110. Lehrsatz.

Zwei beliebige Pyramiden Π und Π_1 (wenn sie auch nicht einerlei Seitenzahl haben) sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen A, A_1 und gleiche Höhen H, H_1 haben.

Beweis. Denn man denke sich beide Pyramiden mit ihren Grundflächen auf eine und dieselbe Ebene E (Fig. 45.) gestellt, so liegen die beiden Spitzen, wegen der gleichen Höhe, in einer mit E parallelen Ebene E_1. Mit diesen Ebenen denke man sich zwischen E und E_1 eine beliebige Menge paralleler Ebenen, worunter E′ und E″ zwei zunächst auf einander folgende seyn mögen, so daß E′ mit den Pyramiden die Durchschnitts-Figuren A′ und A'_1, die von der Grund-Ebene weiter entfernte E″ dagegen die (bezüglich kleineren) Durchschnitts-Figuren A″ und A''_1 bildet. Dann sind A′ und A'_1 einander gleich, so wie auch A″ und A''_1 (nach §. 87. N. 2.); und es kommt nun alles darauf an, zu beweisen, daß die zwischen A′ und A″, eben so zwischen A'_1 und A''_1 liegenden, wenn auch sehr kleinen, abgekürzten Pyramiden einander gleich sind, welche für den Augenblick durch [A′, A″] und [A'_1, A''_1] vorgestellt werden mögen.

Zu dem Ende denke man sich über A′ als Grundfläche und unter die Grundfläche A″ zwei Prismen mit [A′, A″] von derselben Höhe, so liegt [A′, A″] zwischen diesen beiden Prismen, welche durch p(A′) und p(A″) vorgestellt seyn mögen; denn das letztere Prisma p(A″) ist offenbar ein Theil der abgekürzten Pyramide [A′, A″], während letztere selbst wiederum ein Theil ist des größern Prisma p(A′). Eben so liegt aber auch in der andern Pyramide, [A'_1, A''_1] zwischen zwei solchen Prismen p(A'_1) und p(A''_1), so nämlich, daß das abgekürzte Pyramidchen [A'_1, A''_1] kleiner ist als das erstere Prisma p(A'_1), und größer als das andere p(A''_1). — Nun sind aber die Prismen p(A′) und p(A'_1), eben so die Prismen p(A″) und p(A''_1) paarweise einander gleich, weil sie die gleichen Grundflächen $A' = A'_1$ oder $A'' = A''_1$ und dieselbe Höhe haben; also liegen die beiden abgekürzten Pyramiden [A′, A″] und [A'_1, A''_1] zwischen denselben beiden Prismen, während diese beiden Grenz-Prismen, je kleiner man sich die Höhe denkt, d. h. je näher die Ebenen E′ und E″ an einander liegend gedacht werden, desto weniger von einander abweichen und einander so nahe kommen können, als man nur immer will, in so fern man die Höhe derselben so klein denken kann, als man nur immer will. So oft aber jede von zwei Größen G und g zwischen denselben beiden, selbst nicht mehr be-

merkbar von einander verschiedenen Größen liegen, so oft müssen diese Größen nothwendig einander gleich seyn. Also sind die abgekürzten Pyramidchen [A', A''] und [A'$_1$, A''$_1$] wenigstens dann einander gleich, wenn ihre Höhe im Moment des Verschwindens gedacht wird, also wenn die Ebenen E' und E'' unendlich nahe an einander liegen.

Weil aber je zwei unendlich nahe aneinander liegende und mit der gemeinsamen Grund-Ebene parallele Ebenen E' und E'' von den beiden so gestellten Pyramiden gleiche Scheiben abschneiden, und die eine Pyramide nicht mehr solche Scheiben liefern kann als die andere, so sind die ganzen Pyramiden, als Summen gleicher Theile, ebenfalls einander gleich.

§. 111. Zusatz.

Derselbe Beweis würde auch noch gelten, wenn man zwei Kegel hätte statt der Pyramiden, oder einen Kegel und eine Pyramide.

Es sind daher zwei Kegel einander gleich, und eben so ist auch ein Kegel einer Pyramide gleich, wenn sie beide gleiche Grundflächen haben und gleiche Höhe.

§. 112. Lehrsatz.

Jedes dreiseitige gemeine Prisma läßt sich in drei gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen (Fig. 46.).

Beweis. Denn man lege durch AB und F die Ebene ABF, so ist eine dreiseitige Pyramide ABCF abgeschnitten, welche offenbar mit dem Prisma gleiche Höhe und dieselbe Grundfläche hat. Der Körper ABDEF, der dann noch übrig bleibt, ist eine vierseitige Pyramide, deren Grundfläche ABDE und deren Spitze F ist. Legt man daher durch A, E und F die Ebene AEF, so wird die Grundfläche in zwei congruente Dreiecke zerlegt, also die vierseitige Pyramide ABDEF in die beiden gleichen dreiseitigen Pyramiden ADEF und ABEF, in so fern letztere gleiche Grundfläche, $\triangle ABE = \triangle ADE$, und dieselbe Höhe haben. Von diesen beiden letztern Pyramiden ist aber die Eine DEFA der erst abgeschnittenen gleich, weil sie beide mit dem Prisma also auch unter sich einerlei Grundfläche und Höhe haben. Folglich sind alle drei Pyramiden einander gleich.

§. 113. Zusätze.

1) Die zuerst abgeschnittene Pyramide ABCF, welche mit

dem Prisma ABCDEF die Grundfläche und die Höhe gemein hat, ist daher der dritte Theil des Prisma.

2) Und deshalb ist im Allgemeinen jede Pyramide *II* der dritte Theil von jedem beliebigen gemeinen Prisma P, sobald beide gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Denn jedes beliebige gemeine Prisma P ist einem dreiseitigen gleich, sobald es mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat. Und wird dieses dreiseitige Prisma zerlegt (nach §. 112.), so entsteht eine dreiseitige Pyramide, welche der dritte Theil des Prisma P ist und doch der Pyramide *II* gleich, weil sie mit letzterer, so wie mit P gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

3) Auch ein Kegel ist der dritte Theil von einem gemeinen Prisma, sobald beide gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

§. 114. Erklärung.

Denkt man sich eine gerade Linie a, welche eine Kreislinie in einem Punkte trifft und mit ihr nicht in derselben Ebene liegt, parallel mit sich fortbewegt, dergestalt, daß sie nach und nach alle Punkte der Kreislinie durchläuft, so entsteht ein cylindrischer Raum, aus welchem ein Cylinder als völlig begrenzter Körper hervorgeht, wenn man den erstern irgendwo durch eine mit der Kreis-Ebene parallele Ebene schneiden und völlig begrenzen läßt. Die beiden parallelen, von der krummen Fläche, dem Mantel des Cylinders, begrenzten ebenen Figuren (Kreise) heißen die Grundflächen des Cylinders, ihr senkrechter Abstand seine Höhe und die gerade Linie, durch den Mittelpunkt der Kreisfläche parallel mit der beschreibenden geraden Linie a gedacht, seine Axe. Die Linie a heißt auch die erzeugende oder beschreibende Linie (génératrice); der Kreis, um welche sich dieselbe herumbewegt, die Richtungslinie (directrice). — Jede durch einen Punkt des Umfangs des Kreises der Grundfläche mit der beschreibenden Linie a parallele Linie

(deren Punkte alle in dem Cylinder-Mantel liegen müssen) wird Seite des Cylinders genannt. —

Der Cylinder heißt senkrecht, wenn die Axe zugleich seine Höhe ist; im entgegengesetzten Falle wird er schief genannt.

Anmerkung. Für die Künste ist es zweckmäßig, sowohl den Begriff des Cylinders als auch den des Kegels noch etwas weiter zu nehmen, als in den vorstehenden Paragraphen geschehen ist. Statt nämlich in den Definitionen (§. 89. und 114.) von einer Kreislinie auszugehen, kann man eine beliebige, nach einem bestimmten Gesetze zu Grunde gelegte Linie nehmen, übrigens alles unverändert lassen.

Note. So wie der Kegel als eine Pyramide betrachtet werden kann, so kann man auch den Cylinder als ein Prisma sich denken, von unendlich vielen Seitenflächen. Diese Bemerkung gewährt im Praktischen den Vortheil, daß man sogleich, was für alle Prismen gilt, auch für den Cylinder gelten lassen kann. Hier soll jedoch der Cylinder selbstständig behandelt werden.

§. 115. Zusätze.

1) Wird der Cylinder durch eine Ebene geschnitten, welche entweder durch die Axe hindurchgeht oder mit der Axe parallel läuft, so ist die Durchschnitts-Figur ein Parallelogramm und im senkrechten Cylinder ein Rechteck.

Denn die gegenüberstehenden Seiten sind allemal mit der beschreibenden Linie, also auch unter sich parallel.

2) Im Cylinder ist die obere Grundfläche der untern congruent und jede mit den Grundflächen parallel gelegte Ebene schneidet den Cylinder in einem der Grundfläche congruenten Kreise.

Denn legt man durch die Axe ABC (Fig. 47.), zwei beliebige sich schneidende Ebenen CG und CF, so entstehen Parallelogramme, folglich ist CJ=BH=AG und AF=BE=CD; dabei aber auch AG=AF; folglich auch CJ=CD und BH=BE; und so für je zwei Linien, wie hier CJ und CD, oder BH und BE.

3) Im senkrechten Cylinder ist der Mantel desselben einem Rechtecke gleich, dessen Höhe die Axe oder Höhe des Cylinders, dessen Grundlinie aber der Umfang des Kreises der Grundfläche ist.

Note. Man kann auch den senkrechten Cylinder auf eine Ebene gelegt und dann aufgerollt oder seinen Mantel abgewickelt denken.

§. 116. Lehrsatz.

Zwei Cylinder sind congruent, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Axen haben, und wenn die Axen gegen die Grundflächen gleich geneigt sind.

Beweis. Denn die untern Grundflächen und die Axen fallen in einander, und es wird also nur ein Cylinder beschrieben, der beide zugleich vorstellt, weil durch jeden Punkt des Umfanges der Grundfläche mit der Axe nur eine parallele Linie gedacht werden kann.

§. 117. Lehrsatz.

Ein Cylinder ist einem Prisma gleich, wenn beide gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Beweis. Denn da die Grundflächen gleich sind, so ist ein Quadrat als Flächen-Einheit (wenn auch noch so klein) in jeder Grundfläche gleich oft enthalten; folglich ist das über dem Quadrat (durch Linien parallel mit der Axe gezogen) gebildete Parallelepipedum in beiden Körpern gleich oft enthalten; also sind beide Körper einander gleich, nach der (I. Bd. S. 89. N. 25.) gegebenen Definition der Gleichheit.

§. 118. Zusätze.

1) Daher sind auch zwei Cylinder einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

2) Und eine Pyramide oder ein Kegel ist der dritte Theil von einem Cylinder, der mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

§. 119. Lehrsatz und Erklärung.

Wird durch den Punkt H (Fig. 48.) der Grundfläche des

Cylinders eine Linie HJ gelegt, welche den Umfang der Grundfläche berührt, so trifft die Ebene JHG, wenn GH eine Seite des Cylinders ist, den Cylinder bloß in der Linie GH, sonst in keinem Punkte weiter, wenn sie auch nach allen Richtungen hin in's Unendliche verlängert gedacht wird. Eine solche Ebene heißt Berührungs-Ebene an den Cylinder.

Beweis. Denn träfe diese Ebene den Cylinder-Mantel noch in einem Punkte P, so könnte man durch P eine Ebene legen parallel mit den Grundflächen des Cylinders, welche den Cylinder-Mantel in einer Kreislinie NPQR und die Ebene JKLM in der geraden Linie PQ (welche eine Sehne dieser Kreislinie ist) treffen würde, und zwar müßte PQ mit JH parallel laufen. Zieht man aber an Q eine Tangente QS der Kreisline NPQR, so muß solche auch mit JH parallel laufen, weil JH mit CH und QS mit dem Radius QZ gleiche (nämlich rechte) Winkel macht und dabei die Radien CH und ZQ mit einander parallel laufen. Folglich giengen durch den Punkt Q mit einer Linie JH zwei verschiedene parallele Linien hindurch, was nicht möglich ist.

§. 120. Zusätze.

1) Durch jede Seite GH eines Cylinders kann nur eine einzige Berührungs-Ebene gelegt werden.

Denn die Berührungs-Ebene muß von jeder mit der Grundfläche parallelen Ebene in einer geraden Linie geschnitten werden, welche Tangente der durch dieselbe Ebene mit dem Cylinder-Mantel gebildeten Kreislinie ist.

2) Jede andere Ebene, welche in beliebiger Richtung die Tangential-Ebene JGH (Fig. 48.) und die Seite GH, etwa in Q schneidet, giebt eine Durchschnittslinie QT, welche den Cylinder-Mantel ebenfalls nur in dem einzigen Punkte Q trifft, und welche deshalb Berührungs-Linie (oder schlechtweg Tangente) des Cylinders genannt werden kann.

Schluß-Anmerkung.

Zwei Prismen heißen ähnlich, wenn sie ähnliche Grundflächen haben, die Seitenkanten mit den Grundkanten in derselben Ordnung dieselben Winkel bilden nach derselben Richtung hin, und wenn die Seitenkanten mit den Grundkanten proportionirt sind.

Zwei Cylinder dagegen heißen ähnlich (wenn sie beide Kreise zu Grundflächen haben und) wenn die Axen in beiden mit den Grundflächen gleiche Neigungs-Winkel bilden und dabei mit den Durchmessern oder Halbmessern der Grundflächen in Proportion stehen.

Note. Der Begriff der Aehnlichkeit der Pyramiden und Kegel (S. Anmerk. zu §. 86. und §. 97.), der Prismen und der Cylinder, scheint in der Körper-Lehre von höchst unbedeutendem, vielleicht von gar keinem Einfluß zu seyn, und dieserhalb begnügen wir uns, hier einstweilen bloß die Definition beigebracht zu haben.

Die gewöhnliche allgemeine Definition der Aehnlichkeit: „Aehnlich ist, was einerlei Qualität hat"; oder: „ähnlich sind die Körper, welche dieselbe Form haben", oder: „welche hinsichtlich der Form übereinstimmen", so wie die andere Definition der Gleichheit: „gleich ist, was einerlei Quantität hat, oder was hinsichtlich der Quantität übereinstimmt", scheinen nicht für den Mathematiker zu gehören, sondern mehr in das Gebiet der transcendentalen Philosophie. Dem Mathematiker scheint es gerade zuzukommen, in seinen speciellern Fällen nachzuweisen, woran die Uebereinstimmung in der Form, oder das Einerleiseyn der Qualität, und dann auch das Einerleiseyn der Quantität (wie letzteres von uns in der allgemeinen Größen-Lehre I. Bd. S. 89. N. 25. angedeutet ist) erkannt werden solle.

Körperliche Geometrie.

Viertes Kapitel.

Von der Kugel und von den regulären Körpern.

§. 121. Erklärung.

Wird ein Halbkreis ABCD (Fig. 49.) um seinen Durchmesser AB herumbewegt gedacht, so beschreibt die krumme Linie des Halbkreises eine in sich zurücklaufende krumme Fläche, welche Kugelfläche genannt wird, während der von ihr völlig begrenzte Körper Kugel heißt. Der Mittelpunkt und der Durchmesser und Radius des Halbkreises behält dieselben Namen auch für die Kugel. Legt man eine Ebene durch die Kugel, z. B. EG, so wird die Kugel durch sie in zwei Kugelabschnitte (Segmente) zerlegt und jedes Stück der, den Kugel-Abschnitt begrenzenden Kugelfläche heißt Calotte. Unter Kugel-Ausschnitt (Sektor) dagegen versteht man den Theil der Kugel AECGA, welcher von einem Kreis-Ausschnitt, z. B. AEC durch Umdrehung desselben um AC, gebildet wird.

§. 121. a. Zusätze.

1) Alle Halbmesser der Kugel, desgleichen auch alle Durchmesser derselben sind einander gleich.

2) Legt man durch die Kugel eine Ebene, so ist die Durchschnitts-Figur eine Kreislinie, und die Linie KC von ihrem Mittelpunkte nach dem Mittelpunkte der Kugel gezogen, steht auf ihr senkrecht.

Denn, geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so folgt der erste Theil des Satzes aus (N. 1.). Geht sie aber nicht durch den Mittelpunkt der Kugel, wie z, B. die Ebene **ABED** (Fig. 50.), so fälle man von dem Mittelpunkte **C** der Kugel eine senkrechte **CK** auf diese Ebene, nehme in der Durchschnitts-Figur zwei ganz beliebige Punkte **B** und **E**, ziehe **BK, EK, CB** und **CE**, so sind die Dreiecke **CKB** und **CKE** congruent, also auch **KB=KE**; also **ABED** eine Kreislinie und **K** der Mittelpunkt. Und da von **C** aus nur die einzige Senkrechte **CK** auf die Ebene **ABED** möglich ist, so trifft solche nothwendig mit der aus dem Mittelpunkte **K** auf dieselbe Ebene errichteten Senkrechten zusammen, so wie auch mit derjenigen, welche bloß vom Mittelpunkte des Durchschnittskreises nach **C** gezogen gedacht wird.

3) Jeder Kugelkreis, wie z. ABED, der nicht durch den Mittelpunkt der Kugel hindurch geht, ist kleiner, als derjenige, welcher durch den Mittelpunkt hindurch geht. Letzterer heißt daher ein *größter Kugelkreis*, ersterer ein *Kleinerer*.

Denn von letzterem ist der Radius zu gleicher Zeit Radius der Kugel, also die Hypothenuse **CB**, während von einem beliebigen anderen, z. B. **ABED**, die Kathete **BK** der Radius ist.

4) Je weiter die durchgelegte Ebene von dem Mittelpunkte absteht, desto kleiner ist der Kreis. Ist. z. B. **CG>CK**, so ist der Kreis **HJ<** Kreis **AD**.

Denn in den rechtwinklichen Dreiecken **CBK** und **CGH**, ist die Hypothenuse **CH=CB** dieselbe. Ist daher die eine Kathete **CG>** als die Kathete **CK**, so ist die andere Kathete **GH<** als die andere **BK**.

5) Je kleiner der Kugelkreis ist, desto weiter steht er vom Mittelpunkte **C** der Kugel ab.

6) Die Durchschnittslinie zweier größten Kreise der Kugel geht nothwendig durch den Mittelpunkt, ist also ein Durchmesser der Kugel.

7) Zwei größte Kreise halbiren sich daher wechselseitig.

§. 122. Erklärung.

Werden mehrere Ebenen parallel mit einander durch die Kugel gelegt, so heißen die entstehenden Kreise Parallelkreise. Die durch den Mittelpunkt der Kugel auf die Parallelkreise senkrecht gedachte Linie PQ (Fig. 51.) wird die Axe dieser Parallelkreise (zuweilen auch die Axe der Kugel) genannt, und die Punkte P und Q, wo selbige die Kugel-Oberfläche schneidet, heißen die Pole der Axe, oder der Parallelkreise. Die durch die Axe PQ gelegten größten Kreise wie QMP, QAP ꝛc. ꝛc. (welche alle auf den Parallelkreisen senkrecht stehen) werden Meridiankreise oder Meridiane genannt, und derjenige unter den Parallelkreisen, welcher zu gleicher Zeit ein größter Kreis der Kugel ist, also welcher durch den Mittelpunkt der Kugel hindurch geht, kann dann auch Aequator genannt werden.

Ferner wird das zwischen zwei Parallelkreisen liegende Stück der Kugel-Oberfläche eine Zone genannt, so wie das Stück der Kugel selbst eine körperliche Zone heißt.

§. 123. Zusätze.

1) Durch einen einzigen Punkt auf der Kugel-Oberfläche ist ein, zu einer bestimmten Axe PQ gehöriger Meridiankreis ganz und völlig bestimmt.

Denn durch eine Linie PQ und einen Punkt außer ihr ist die Lage einer Ebene völlig bestimmt.

2) Die Bogen PN, PD (Fig. 51.) zweier Meridiane vom Pol P bis zu einem Parallelkreis, sind alle einander gleich.

Denn, ist K der Mittelpunkt des Parallelkreises, so sind die Dreiecke CKN und CKD congruent; also ist W. DCP = W. NCP, mithin auch Bog. DP = Bog. NP, weil die Meridiankreise lauter größte Kreise sind, also gleiche Radien haben.

3) Sind drei solche Bogen PD, PN und PE einander

gleich, so ist DNE ein zur Axe PQ gehöriger Parallelkreis, d. h. senkrecht auf der Axe PQ.

Denn, wegen Bog. DP = Bog. NP = Bog. EP ist auch W. DCP = W. NCP = W. ECP, also, weil auch noch CE = CD = CN und CK = CK ist, $\triangle$ CKD $\cong \triangle$ CKN $\cong \triangle$ CKE; mithin auch W. CKD = W. CKN = W. CKE. Nun hat aber eine Linie CK (nach §. 18. N. 2.) mit Linien einer Ebene nie drei gleiche Neigungs-Winkel, wenn sie nicht senkrecht auf der Ebene steht.

4) Der Meridian-Bogen zwischen dem Pol P und dem Aequator ist ein Quadrant.

5) Schneidet ein größter Kreis der Kugel AB, von zwei Meridiankreisen QAP und QMP, vom Pole P abgerechnet, Quadranten PA und PM ab, so ist dieser größte Kreis der Aequator, d. h. senkrecht auf der Axe PQ.

Denn es ist dann PCA und PCM jedesmal ein rechter Winkel, also PC auf CA und CM zugleich senkrecht.

6) Der Winkel MCA der beiden Durchschnittslinien AC und MC der Meridiane mit dem Aequator, ist der Neigungs-Winkel der beiden Meridiane zu einander, d. h. der dem Flächen-Winkel an CP der beiden Meridiankreise, correspondirende Linien-Winkel. — Der Winkel DKN ist aber ebenfalls dieser Neigungs-Winkel.

Denn es stehen CA, CM, eben so aber auch KD und KN auf der Axe, welche hier Kante des Flächen-Winkels ist, senkrecht.

Note. Man bemerke aber hierbei, daß man in der Kugel zwei beliebige größte Kreise der Kugel zu zwei Meridiankreisen und ihre Durchschnittslinie dann zur Axe derselben nehmen kann, daß also, was hier namentlich in den letztern Nummern von Meridiankreisen gelehrt ist, von je zwei beliebigen größten Kreisen gilt. — In den Anwendungen dieser Lehren auf mathematische Geographie und sphärische Astronomie, hat die Axe (und mit ihr haben die Parallelkreise, der Aequator und die Meridiane) in der Kugel ihre feste Lage.

§. 124. Erklärung.

Der Theil der Kugel-Oberfläche, z. B. PMQAP (Fig. 51.), welcher von zwei größten Kreisen AQP und MQP abgeschnitten,

also von zwei größten Halbkreisen begrenzt wird, heißt ein Kugelzweieck oder auch ein sphärischer Winkel; und die Punkte P und Q werden seine beiden Pole genannt.

§. 125. Zusätze.

1) Zwei größte Kreise theilen die Kugelfläche allemal in vier Kugelzweiecke, von denen je zwei einander gerade gegenüber liegen und congruent sind.

2) Das Kugelzweieck oder der sphärische Winkel PMQAP ist allemal völlig bestimmt durch den Flächen-Winkel, welchen die beiden größten Kreise PAQ und PMQ mit einander bilden. — Umgekehrt auch ist der letztgedachte Flächen-Winkel durch das Kugelzweieck oder den sphärischen Winkel völlig bestimmt. Man kann daher in dieser Beziehung den sphärischen Winkel (oder das Kugelzweieck) PMQAP mit dem Flächen-Winkel an PQ der beiden größten Kreise, oder auch mit den Neigungs-Winkeln (correspondirenden Linien-Winkeln) MCA oder NKD geradezu verwechseln, ohne eine Verwirrung in den zu ziehenden Folgerungen befürchten zu dürfen.

§. 126. Erklärung.

Denkt man sich ein körperliches Dreieck (§. 62. N. 2.) mit seiner Spitze in den Mittelpunkt einer Kugel gestellt, so bilden dessen drei Seiten größte Kreise auf der Kugel-Oberfläche, und letztere schneiden auf der Kugel-Oberfläche ein sphärisches Dreieck ab. Die drei größten Kreisbogen, welche die Grenzen desselben bilden, heißen die Seiten desselben, und unter den Winkeln desselben versteht man die sphärischen Winkel, welche von je zweien der Seiten (nach §. 124.) gebildet werden, auch oft die Winkel des körperlichen Dreiecks, oder ihre correspondirenden Linien-Winkel selbst (Vergleiche §. 125. N. 2.).

Die Eintheilung der sphärischen Dreiecke in rechtwinkliche und schiefwinkliche; ferner die Benennungen Kathete, Hypothenuse findet für die sphärischen Dreiecke eben so

statt, wie sie für die ihnen entsprechenden körperlichen Dreiecke statt hat.

Die zu körperlichen Scheitel-Dreiecken gehörigen sphärischen Dreiecke heißen entgegengesetzte sphärische Dreiecke.

Und denkt man sich ein körperliches Vieleck mit seiner Spitze in den Mittelpunkt einer Kugel gestellt, so entsteht ein sphärisches Vieleck.

Anmerkung. So oft also drei größte Kreise der Kugel sich wechselseitig schneiden, so bilden sie allemal ein körperliches Dreieck (dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist) und zugleich ein zugehöriges sphärisches Dreieck auf der Oberfläche der Kugel. — Schneiden sich aber zwei größte Kreise, z. B. QAP und QMP (Fig. 51.) und will man den Winkel haben, den solche mit einander bilden, so muß man entweder einen zugehörigen kleinern Parallelkreis DNE oder den Aequator AMB sich denken (d. h. einen kleinern oder einen größten Kreis senkrecht auf die Durchschnittslinie PQ) und ACM oder DKN ist dann dieser Neigungs-Winkel. Denselben würde man aber auch erhalten, wenn man in dem Punkte P in jeder der beiden Ebenen QAP und QMP Tangenten an die Kreislinien ziehen wollte, z. B. PR an den Kreis QAP, und PS an den andern QMP, weil beide Tangenten ebenfalls auf dem Radius CP, also auf der Kante QP senkrecht stehen.

Note. In diesem Sinne könnte man wohl auch sagen, daß NPD der sphärische Winkel wäre, wenn man nur den Winkel darunter verstände, welchen die ersten Elemente der Bogen PN, PD an P unmittelbar, in so fern solche als mit den Tangenten PR und PS zusammenfallend gedacht werden können, mit einander bilden; dann wäre aber der sphärische Winkel nichts weiter, als der zum Flächen-Winkel gehörige Neigungs-Winkel ACM oder DKN oder RPS.

§. 127. Zusätze.

1) Sind zwei körperliche Dreiecke congruent, so sind auch die zugehörigen sphärischen Dreiecke, wenn sie aus derselben Kugel geschnitten sind, congruent. Und dieser Satz gilt auch umgekehrt.

2) Zwei entgegengesetzte sphärische Dreiecke haben dieselben Seiten und dieselben Winkel und sind einander gleich, ohne jedoch congruent zu seyn, weil sie nach zwei verschiedenen Richtungen hin hohl sind.

3) Sphärische Dreiecke sind in allen den Fällen congruent, in welchen die körperlichen es sind, und welche man (§§. 78.—83.) aufgezählt findet.

4) Was für die körperlichen Dreiecke überhaupt in Bezug auf die Seiten und Winkel desselben gelehrt worden ist (im 2ten Kapitel), muß nothwendig auch für die sphärischen Dreiecke gelten, wenn nur die Seiten des sphärischen Dreiecks nicht im Längenmaaß, sondern in Graden ausgedrückt gedacht werden, d. h. in Verhältnißzahlen zu der ganzen größten Kreislinie.

5) Eben so gilt von den sphärischen Vielecken, in Bezug auf ihre Seiten und Winkel, alles was von den körperlichen Vielecken in derselben Beziehung gilt, wenn nur die Seiten in Graden ausgedrückt werden und nicht im Längenmaaße.

Note. Es könnte übrigens eine Seite eines sphärischen Dreiecks auch im Längenmaaß ausgedrückt seyn, wenn nur der Halbmesser der Kugel auch bekannt wäre, um aus beiden die Zahl der Grade, welche die Seite hat, ausmitteln zu können. Und selbst diese Bedingung zu machen, ist so lange unnöthig, als nicht Maaße der Seiten in Betrachtung gezogen werden.

§. 128. Erklärung.

Unter Berührungs-Ebene einer Kugel versteht man jede Ebene, welche auf einem Radius CA (Fig. 51.) der Kugel senkrecht steht und durch den Endpunkt A desselben hindurch geht. Berührungslinie an die Kugel ist jede Linie, welche durch den Punkt A in der Berührungs-Ebene beliebig gezogen wird, also jede Linie, welche durch A und senkrecht auf CA gedacht wird.

Denkt man sich aber durch alle Punkte eines größten Kreises der Kugel Linien, alle senkrecht auf den größten Kreis, so bilden diese Linien, da sie alle mit einander parallel laufen (nach

§. 114.) eine cylindrische Fläche, und diese wird der Berührungs-Cylinder der Kugel, auch die um die Kugel beschriebene cylindrische Fläche genannt.

§. 129. Zusätze.

1) Die Berührungs-Ebene an A trifft die Kugel-Fläche nur in diesem einzigen Punkte A und alle ihre übrigen Punkte liegen außerhalb der Kugel.

Denn, ist Z irgend ein anderer Punkt der Ebene, so ist CAZ ein bei A rechtwinkliches Dreieck, also $CZ > CA$, d. h. CZ größer wie der Radius der Kugel, also Z außerhalb der Kugel.

Note. Diese Beweis-Art könnte auch mit Leichtigkeit auf die Sätze (§§. 99. und 119.) angewandt werden.

2) Auch die Berührungslinie der Kugel an A trifft die Kugel-Oberfläche nur in diesem einzigen Punkte A.

3) Dieselben beiden Sätze gelten auch umgekehrt, d. h. jede Ebene V und jede Linie v, welche die Kugel nur in einem einzigen Punkte A trifft, steht senkrecht auf dem Radius CA.

Denn ständen sie nicht senkrecht, so könnte man auf die Ebene V oder auf die Linie v, von dem Mittelpunkte der Kugel C aus, eine Senkrechte CX gefällt denken, und dann wäre CXA ein bei X rechtwinkliches Dreieck, also $CX < CA$, d. h. X müßte innerhalb der Kugel liegen, und dann würde die Ebene V oder die Linie v, die Kugel noch einmal treffen.

4) Der Berührungs-Cylinder (die um die Kugel beschriebene cylindrische Fläche) trifft die Kugel ebenfalls nicht weiter, als in dem größten Kreise, auf welchem er errichtet worden.

Denn keine der sie bildenden geraden Linien trifft die Kugelfläche noch in einem anderen Punkte.

§. 130. Lehrsatz.

Sind A und B zwei beliebige Punkte auf der Kugelfläche (Fig. 52.), so ist der zwischen A und B gedachte größte Kreis der Kugel AFB, so lange er kleiner als der halbe größte Kreis

der Kugel ist, kleiner als jede andere zwischen A und B auf der Kugelfläche gezogene kleinere Kreislinie AGB.

Beweis. Denn legt man die Sektoren **ACBFA** und **AKBGA** mit ihrer gleichen Sehne auf einander, so fällt der Mittelpunkt **K** in die Linie **CF** zwischen **C** und **F**, etwa in **L**, weil der Radius **KA** kleiner ist als der Radius **CA**. Dann fallen aber die Bogen **AFB** und **AGB** in eine und dieselbe Ebene, und zwar fällt der mit dem größern Radius **CA** beschriebene **AFB**, zwischen die Sehne **AB** und den andern Bogen **AGB**; also ist letzterer der größere (E. G. §. 30. N. 14.).

§. 131. Erklärung.

Ein regulärer Körper wird derjenige genannt, der von lauter congruenten und regulären ebenen Figuren begrenzt wird, welche (paarweise mit einander gleiche Flächen-Winkel bildend) lauter congruente und gleichseitige körperliche Vielecke zu Ecken haben.

Note. Es geht aber aus dieser Definition noch nicht hervor, ob es wirklich reguläre Körper giebt.

§. 132. Lehrsätze und Erklärungen.

Es giebt nur fünf reguläre Körper: 1) das Tetraëder, welches eine von vier congruenten und gleichseitigen Dreiecken begrenzte Pyramide ist, also vier Ecken hat; 2) das Octaëder, ein von acht congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper, mit sechs Ecken; 3) das Icosaëder von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt, mit zwölf Ecken; 4) das Hexaëder (früher unter dem Namen Kubus oder Würfel schon definirt), von sechs congruenten Quadraten begrenzt, mit acht Ecken; endlich 5) das Dodekaëder, von zwölf regulären Fünf-Ecken begrenzt, und zwanzig körperliche Ecken habend.

Beweis. Denn in einem körperlichen Dreieck, Viereck, Vieleck, machen die Summe aller Seiten zusammen immer weniger aus als vier rechte Winkel. Der reguläre Körper kann von regulären ebenen Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, vielleicht auch von regulären n Ecken begrenzt seyn, wo $n > 5$ ist; doch müssen wenigstens drei solche Figuren jedesmal in einer Ecke

zusammenstoßen. Im regulären Dreiecke hat jeder Winkel 60° oder $\frac{2}{3}$R. Man kann also drei, vier, auch fünf reguläre Dreiecke in einer Ecke zusammenstoßen lassen, aber nicht sechs oder mehr derselben, weil 6·60° schon 360° oder 4R ausmacht. Von regulären Dreiecken begrenzt, kann es also höchstens drei reguläre Körper geben. Aus demselben Grunde kann es nur einen einzigen geben, von Quadraten begrenzt, und auch nur einen einzigen, von regulären Fünfecken begrenzt, in so fern vier oder mehr Winkel eines Quadrats oder eines regulären Fünfecks deshalb nicht in einer Ecke zusammenstoßen können, weil ihre Summe bereits 4R oder mehr als 4R ausmachen würde. Endlich machen drei Winkel eines regulären Sechsecks, Siebenecks, u. s. w. f. schon 4R oder mehr als 4R; folglich können nicht drei, und um so weniger mehr als drei reguläre Sechsecke, Siebenecke u. s. w. f. in einer körperlichen Ecke zusammenstoßen, weil die Summe dieser Winkel allemal 4R oder mehr als 4R betragen würde.

Es erhellet also hieraus, daß es höchstens fünf reguläre Körper geben kann. Ob es aber wirklich fünf solche giebt und nicht noch weniger, erhellet noch nicht.

Es ist aber die Existenz des Tetraëders, d. h. einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche und deren drei Seitenflächen reguläre (gleichseitige) Dreiecke sind, außer Zweifel. Ferner erhellet die Existenz des Hexaëders (Kubus, Würfels). Die Existenz des Octaëders wird dadurch außer Zweifel gesetzt, daß man vier reguläre Dreiecke in eine vierseitige Pyramide dergestalt vereinigt sich denkt, daß ihre Grundfläche ein Quadrat wird, und nun eine zweite eben so gebildete vierseitige Pyramide mit ihren Quadrat-Grundflächen zusammenstellt. Der Körper hat dann außer den zwei Ecken der vierseitigen Pyramiden, noch vier Ecken, da wo die Quadrat-Grundflächen gebildet werden, und die letztern vier Ecken sind genau so gebildet wie die zwei erstern.

Von der Existenz des Icosaëders überzeugt man sich, wenn man erstlich fünf gleichseitige Dreiecke zu einer fünfseitigen Pyramide vereint, deren Grundfläche ein reguläres Fünfeck ist. An jedem der fünf Eckpunkte dieses Fünfecks stoßen nun schon die zwei gleichseitigen Dreiecke, welche die Seitenflächen der fünfseitigen Pyramide bilden, unter demselben Winkel zusammen, wie oben an der Spitze; also kann man an jeden dieser fünf Eckpunkte noch drei solche gleichseitige Dreiecke zusammenstoßend sich denken, um jedesmal ein, dem erstern congruentes körperliches Fünfeck zu haben, wobei jedoch in die Augen fällt, daß je zwei auf einander folgende dieser fünf Eckpunkte ein anstoßendes Dreieck gemeinschaftlich haben. Auf diese Weise ist eine gebrochene Fläche von funfzehn Dreiecken gebildet. Von der Seite,

wo der Körper jetzt noch offen ist, stoßen fünf Seiten von fünf solchen congruenten regulären Dreiecken unter gleichen Winkeln zusammen, bilden also ein reguläres Fünfeck, congruent der Grundfläche der zuerst gebildeten fünfseitigen Pyramide, so daß sich genau eine solche noch aufsetzen und so der Körper völlig begrenzen läßt.

Auf dieselbe Weise wird man sich auch noch von der Existenz des Dodekaëders überzeugen. An ein reguläres ebenes Fünfeck denkt man sich noch fünf dergleichen angetragen, so daß sich an jedem Eckpunkte des erstern Fünfecks, drei dieser regulären Fünfecks-Winkel zu einer körperlichen Ecke vereinigen. Zwischen je zwei zusammenstoßenden der letztern fünf regulären Fünfecke kann dann gerade wiederum ein Winkel eines congruenten regulären ebenen Fünfecks eingeschoben werden, so daß fünf neue körperliche Ecken entstehen, den erstern congruent; und weil die letztern fünf Fünfecke wiederum paarweise mit einer Seite zusammenstoßen müssen, so bilden sie da, wo der Körper noch offen ist, abermals ein reguläres Fünfeck aus derselben Seite bestehend, also den übrigen congruent. Und dieses letztere begrenzt nun den Körper vollends, so daß zwölf solche reguläre ebene congruente Fünfecke seine Begrenzung vollenden und zugleich lauter congruente körperliche Ecken bilden.

Anmerkung. Aus dieser Entwicklung geht zu gleicher Zeit hervor, daß aus einer gegebenen Seite nur ein einziges Tetröder, nur ein einziges Octaëder, nur ein einziges Icosaëder, nur ein einziges Hexaëder und auch nur ein einziges Dodekaëder construirt werden kann, so daß zwei gleichartige reguläre Körper (z. B. zwei Icosaëder) congruent seyn müssen, so oft in beiden eine Kante dieselbe ist.

§. 133. Lehrsatz und Erklärung.

In allen regulären Körpern giebt es einen Punkt, der von allen Eckpunkten und auch von allen Grenz-Ebenen gleich weit absteht. Dieser Punkt C wird Mittelpunkt des regulären Körpers genannt, und wird gefunden, wenn man zwei durch die Mittelpunkte M und M_1 zweier der regulären ebenen Grenz-Figuren φ und φ_1 gelegte und auf letzteren senkrechte Linien MC

und M_1C sich so weit verlängert denkt, bis sie sich schneiden in C (Fig. 53.) *) oder (Fig. 54.).

Beweis. Man beweise zuerst, daß MC und M_1C in einer und derselben Ebene liegen. Ist aber AB die Seite, in welcher φ und φ_1 zusammenstoßen und K ihr Halbirungs-Punkt, so stehen KM und KM_1 auf AB senkrecht, also AB und dann auch φ und φ_1 auf der Ebene MKM_1 senkrecht; folglich liegt auch jede in φ und φ_1 aus Punkten der Durchschnittslinien MK, M_1K auf φ und φ_1 errichtete senkrechte Linie, und daher auch MC und M_1C in der senkrechten Ebene MKM_1, und letztere Linien müssen sich nun auch schneiden, weil MK und M_1K einen Winkel mit einander bilden $\sphericalangle 2R$, nämlich den Neigungs-Winkel zweier der Grenzebenen des regulären Körpers.

Ist nun φ_2 noch eine anstoßende Grenzfigur, deren Mittelpunkt M_2 seyn mag und welche mit φ die Linie AD, deren Halbirungs-Punkt K_1 seyn kann, gemein haben soll, so ziehe man CM_2 und beweise, daß $CM_2 = CM = CM_1$ und daß CM_2 auf der Ebene φ_2 senkrecht steht.

Zu dem Ende ziehe man M_2K_1, MK_1, welche beide auf AD senkrecht stehen, ferner CA, CB und CD, so ist: 1) $\triangle CKM_1 \cong \triangle CKM$, weil außer den rechten Winkeln bei M und M_1, noch $KM = MK_1$ und $CK = CK$ ist; folglich $CM = CM_1$ und der Winkel MKM_1 durch CK halbirt. Da ferner CK senkrecht steht auf AB, so ist auch $\triangle CAK \cong \triangle CBK$, folglich auch $CA = CB$. Ferner liegt CM und also auch CK_1 in der Ebene MK_1M_2, also die Linie AD, welche auf der letztern Ebene senkrecht steht, auch senkrecht auf CK_1. Dann sind aber auch die bei K_1 und K rechtwinklichen Dreiecke CAK und CAK_1 congruent, weil $AK = AK_1$ und $CA = CA$ ist; also $CK = CK_1$ und deshalb wiederum $\triangle CKM \cong \triangle CK_1M$, weil bei M der rechte Winkel und $CK = CK_1$ und $MK = MK_1$ ist; also auch $\mathfrak{W}. CK_1M = \mathfrak{W}. CKM$. Aber $\mathfrak{W}. CKM$ ist die Hälfte vom $\mathfrak{W}. MKM_1$, also auch die Hälfte vom $\mathfrak{W}. MK_1M_2$, mithin auch $\mathfrak{W}. CK_1M$ die Hälfte vom $\mathfrak{W}. MK_1M_2$ und $\mathfrak{W}. CK_1M_2$ die andere Hälfte, so daß $\mathfrak{W}. CK_1M = \mathfrak{W}. CK_1M_2$ seyn muß. Und nun sind die Dreiecke CK_1M und CK_1M_2 congruent, weil $K_1M = K_1M_2$, $\mathfrak{W}. CK_1M = \mathfrak{W}. CK_1M_2$ und $CK_1 = CK_1$ ist; also ist auch $CM = CM_2$ und $\mathfrak{W}. CMK_1 = \mathfrak{W}. CM_2K_1 = R$ und deshalb auch CM_2 senkrecht auf der Grenz-Ebene φ_2. Weil endlich auch

*) In diesen Figuren (Fig. 53. und 54.) sind bloß drei zusammenstoßende Grenzebenen gezeichnet; den Punkt C muß man sich im Raume dazu denken.

CK, senkrecht auf AD ist, so hat man noch $\triangle CAK_1 \cong \triangle CDK_1$; also ist auch $CA = CD$.

Es ist also erwiesen, daß $CM = CM_1 = CM_2$ und $CA = CB = CD$ ist und daß CM_2 noch senkrecht auf φ_2 steht.

Dasselbe auf dieselbe Weise wird nun für jede andere Grenz-Ebene dargethan und für jede andere Ecke.

§. 134. Zusätze.

1) Es kann daher allemal um und in einen regulären Körper eine Kugel beschrieben werden, d. h. eine solche, welche durch alle Eck-Punkte des Körpers hindurchgeht und deren Radius $= CA = CB = CD =$ ꝛc. ist; und dann noch eine zweite, welche alle Grenz-Ebenen berührt und deren Radius $= CM = CM_1 = CM_2 =$ ꝛc. ist (Fig. 53. oder 54.).

2) Außer diesen beiden Radien CA und CM ist noch der Radius MA des Kreises zu bemerken, der um eine der regulären ebenen Grenzfiguren beschrieben werden kann; ferner noch die auf eine Kante AB senkrechten Linien MK und CK; und es finden zwischen diesen, folgende Gleichungen statt:

$$1)\ CK^2 = CM^2 + MK^2,$$
$$2)\ CA^2 = CK^2 + \tfrac{1}{4}AB^2,$$
$$3)\ CA^2 = CM^2 + AM^2,$$

weil $\mathfrak{W}.\,CMA = \mathfrak{W}.\,CMK = \mathfrak{W}.\,CKA = \mathfrak{W}.\,MKA = R$ ist.

Aus diesen Gleichungen kann man, wenn die Kante AB gegeben wird, weil dann, nach den in der ebenen Geometrie beigebrachten Sätzen, AM und MK sogleich gefunden werden können, auch noch zwei der drei Linien CA, CK und CM durch die dritte ausdrücken, so daß nur noch eine einzige Gleichung erforderlich ist, um CA, CK und CM alle dreie zu haben.

3) Zieht man in einem regulären Körper aus dem Mittelpunkte nach allen Ecken lauter gerade Linien, so wird der Körper in so viele congruente Pyramiden zerlegt, als die Zahl der regulären ebenen Figuren beträgt, welche ihn begrenzen. Jede dieser regulären ebenen Figuren wird Grundfläche, und die senk-

rechte CM ist die Höhe einer solchen Pyramide (Fig. 53. oder 54.), während C der Mittelpunkt und in den Zeichnungen nicht angegeben ist.

§. 135. Lehnsätze aus der ebenen Geometrie.

I. Ist a die Seite eines regulären Dreiecks und r der Radius des umschriebenen Kreises, so hat man zwischen r und a die Gleichungen

$$r^2 = (\tfrac{1}{2}r)^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2 \quad \text{oder} \quad 3r^2 = a^2,$$

oder $r = a\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}$ oder $a = r\sqrt{3}$.

Und ist h die Höhe eines der drei congruenten Dreiecke, in welche das reguläre Dreieck aus seinem Mittelpunkte zerlegt werden kann, so hat man noch $h = \tfrac{1}{2}r$. (Eb. Geom. §. 96.).

II. Ist a die Seite eines regulären Fünfecks, r der Radius des umschriebenen Kreises, und b die Seite des in demselben Kreise beschriebenen regulären Zehnecks, so hat man die Gleichungen (E. G. §. 96.):

$$a^2 = b^2 + r^2 \quad \text{und} \quad r : b = b : r - b,$$

woraus sich findet:

1) $r = \tfrac{1}{2}b(1+\sqrt{5})$ oder $b = \tfrac{1}{2}r(-1+\sqrt{5})$

2) $a = \tfrac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ oder $r = a\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{10}\sqrt{5}}$.

Und ist d die Diagonale desselben regulären Fünfecks und h die Höhe eines der fünf Dreiecke, in welche das reguläre ebene Fünfeck zerlegt werden kann, so hat man noch die Gleichungen:

$$h^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}a^2 \quad \text{und} \quad d^2 = (r+h)^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = 4r^2 - b^2,$$

(alles aus der Figur), woraus hervorgeht

3) $h = a\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{10}\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4}r(1+\sqrt{5})$

und

4) $d = \tfrac{1}{2}a(1+\sqrt{5}) = \tfrac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

III. Und ist r der Radius des um ein Quadrat, dessen Seite $= a$, beschriebenen Kreises, so wie h die Höhe eines der vier

Dreiecke, in welche das Quadrat aus dem Mittelpunkte zerlegt werden kann, so hat man noch

$$a^2 = 2r^2 \quad \text{und} \quad h^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}a^2;$$

also $r = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $a = r\sqrt{2}$

und $h = \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}r\sqrt{2}$.

Note. Anfänger werden sich diese Sätze als Aufgaben vorlegen, sie selbstthätig lösen und zugleich mehrere Auflösungen finden. — So findet sich z. B. noch

in I. .. $r \cdot cos\ 30^0 = \tfrac{1}{2}a$ also $a = 2r \cdot cos\ 30^0$ und $r = \dfrac{a}{2 \cdot cos\ 30^0}$;

in II. .. $r \cdot sin\ 54^0 = h$, $r \cdot cos\ 54^0 = \tfrac{1}{2}a$ und $d = 2r \cdot sin\ 72^0$;

und in

III. .. $r \cdot sin\ 45^0 = h = r \cdot cos\ 45^0 = \tfrac{1}{2}a$.

§. 136. Aufgabe.

Es ist gegeben die Seite (Kante) a des regulären Tetraëders, man soll den Radius R der umschriebenen und den Radius ϱ der eingeschriebenen Kugel finden.

Auflösung. Denkt man sich aus einer der Ecken, z. B. A (Fig. 55.) auf das gegenüberliegende begrenzende Dreieck BCD eine senkrechte Linie gefällt, so geht solche durch den Mittelpunkt F der beiden Kugeln hindurch und trifft auch das begrenzende Dreieck BCD in seinem Mittelpunkte E. Denkt man sich ferner durch AE und C einen größten Kreis ACG der Kugel gelegt, so ist AG der Durchmesser 2R der umschriebenen Kugel, CE senkrecht auf ihn, und dabei $CE = r$ der Radius des, um das reguläre Dreieck BCD beschriebenen Kreises, so daß also, wenn F der Mittelpunkt der Kugeln ist, $AG = 2R$, $FE = \varrho$, $AE = R + \varrho$, $GE = R - \varrho$, $CE = r = a\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ (nach §. 135. N. 1.) ist und dabei (nach E. G. §. 79.):

1) $AE : CE = CE : EG$,

so wie, weil AEC ein bei E rechtwinkliches Dreieck ist,

2) $AC^2 = AE^2 + EC^2$.

Die Gleichung (1.) wird

$$R+\varrho : a\sqrt{\tfrac{1}{3}} = a\sqrt{\tfrac{1}{3}} : R-\varrho$$

oder 3) $R^2-\varrho^2=\frac{1}{3}a^2$.

Die andere Gleichung (2.) wird dagegen

4) $a^2=(R+\varrho)^2+\frac{1}{3}a^2$.

Aus den beiden Gleichungen (3. und 4.) kann man aber sowohl R als auch ϱ finden.

Man findet nämlich durch Auflösung dieser Gleichungen

$$R=\tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

und

$$\varrho=\tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{6}}.$$

Anmerkung 1. Man konnte auch statt der Gleichung (1.) die Gleichung

$$FE^2+EC^2=FC^2$$

d. h. $\varrho^2+\frac{1}{3}a^2=R^2$

nehmen, welche auf dieselbe Form zurückgebracht werden kann.

Anmerkung 2. Der Radius ϱ der eingeschriebenen Kugel ist zu gleicher Zeit die Höhe einer der vier Pyramiden, in welche das Tetraëder aus seinem Mittelpunkte zerlegt werden kann.

§. 137. Aufgabe.

Im Octaëder, dessen Kante $=a$ ist, den Radius R der umschriebenen, und den Radius ϱ der eingeschriebenen Kugel zu finden.

Auflösung. Weil das Octaëder aus zwei einander an der Grundfläche gegenüberliegenden vierseitigen Pyramiden besteht, so ist der Halbmesser R der umschriebenen Kugel zugleich die Höhe einer dieser Pyramiden, deren Grundfläche das Quadrat über a ist, und deren Höhe die Grundfläche in ihrem Mittelpunkte trifft. Es bildet demnach der Radius R (die Höhe der Pyramide), der Radius r_1 des um das Quadrat a^1 beschriebenen Kreises, und die Kante a der Pyramide ein rechtwinkliches

Dreieck, von welchem a die Hypothenuse ist, so daß man hat:

$$a^2 = R^2 + r_1^2,$$

während $a^2 = 2r_1^2$ gegeben ist.

Daraus folgt $R^2 = \frac{1}{2}a^2$ und $R = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Denkt man sich nun aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eines der Grenzdreiecke die senkrechte Linie ϱ gefällt, so bilden R, ϱ und der Radius r des regulären Dreiecks (dessen Seite $= a$) abermals ein rechtwinkliches Dreieck, von welchem R die Hypothenuse ist, so daß man hat

$$R^2 = \varrho^2 + r^2,$$

während $r^2 = \frac{1}{3}a^2$ (nach §. 135. I.).

Daraus folgt dann $\varrho = a\sqrt{\frac{1}{6}}$.

Anmerkung. Auch hier ist ϱ zu gleicher Zeit die Höhe einer der acht Pyramiden, in welche das Octaëder aus seinem Mittelpunkte zerlegt werden kann.

§. 138. Aufgabe.

Im Icosaëder, dessen Kante $= a$ ist, den Radius R der umschriebenen und den Radius ϱ der eingeschriebenen Kugel zu finden (ohne Figur).

Auflösung. Man denke sich durch eine Ecke A und den Mittelpunkt C der Kugeln einen Durchmesser, so wird solcher auch durch die gegenüberliegende Ecke B gehen und zu gleicher Zeit die Mittelpunkte der regulären Fünfecke treffen, welche der, diese Ecken zu Spitzen habenden fünfseitigen Pyramiden zu Grundflächen dienen, und wovon die bei A liegende durch DEFGH vorgestellt seyn mag, so wie ihr Mittelpunkt durch K. Wird ferner durch ADB ein größter Kreis der Kugel gedacht, und der Radius DK gezogen, so steht DK auf AB senkrecht, und man hat daher:

1) $AK : AD = AD : AB.$

Nun bilden aber AK, DK und AD ein rechtwinkliches Dreieck; also ist

2) $AD^2 = AK^2 + DK^2$;

und weil DK der Radius ist des, um das reguläre Fünfeck, dessen Seite $= a$, beschriebenen Kreises, so ist (nach §. 135. II.)

3) $DK = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$;

und nun aus (2.), weil $AD = a$ ist,

4) $AK = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$

und zuletzt aus (1.):

$$AB = 2R = a\sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}} = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},$$

mithin $R = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Um nun ϱ zu finden, ziehe man aus dem Mittelpunkte der Kugel nach einem der begrenzenden regulären Dreiecke eine senkrechte Linie (welche ϱ selber ist), so wird solche in den Mittelpunkt des, um das reguläre Dreieck beschriebenen Kreises treffen, dessen Radius r seyn mag, so daß R, r und ϱ ein rechtwinkliches Dreieck bilden und

$$R^2 = r^2 + \varrho^2$$

ist. Es ist aber (nach §. 135. I.) $r = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ und, wie eben gefunden worden, $R = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$;

folglich $\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \frac{1}{4}a \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Anmerkung. Es ist aber ϱ zugleich die Höhe einer der zwanzig Pyramiden, in welche das Icosaëder aus dem Mittelpunkte zerlegt werden kann.

§. 139. Aufgabe.

Es ist gegeben ein Würfel (Kubus, Hexaëder), dessen Seite

$=a$; man soll den Radius R der umschriebenen und den Radius ϱ der eingeschriebenen Kugel finden.

Auflösung. Der Radius ϱ der eingeschrieben Kugel ist offenbar die Hälfte der Höhe, also

$$\varrho = \tfrac{1}{2}a.$$

Der Radius R der umschriebenen Kugel, der Radius ϱ der eingeschriebenen, und der Radius r des, um das reguläre Viereck beschriebenen Kreises bilden ferner ein rechtwinkliches Dreieck, so daß man hat

$$R^2 = \varrho^2 + r^2,$$

während $r = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist. Hieraus folgt aber

$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

§. 140. Aufgabe.

Im Dodekaëder, dessen Seite (Kante) $=a$ ist, den Radius R der umschriebenen, so wie den Radius ϱ der eingeschriebenen Kugel zu finden.

Auflösung. Man denke sich durch den Mittelpunkt des Dodekaëders eine Ebene gelegt, parallel mit einem der begrenzenden regulären Fünfecke, so halbirt solche allemal zwei Seiten der rings herum liegenden regulären Fünfecke und bildet daher, die Halbirungs-Punkte als Ecken betrachtet, ein reguläres Zehneck, dessen Seite b die halbe Diagonale eines der regulären Fünfecke, daher (nach §. 135. II.)

$$b = \tfrac{1}{4}a(1+\sqrt{5})$$

ist. Der Radius r dieses regulären Zehnecks ist (nach §. 135. II.)

$$r = \tfrac{1}{2}b(1+\sqrt{5}) = \tfrac{1}{8}a(1+\sqrt{5})^2 = \tfrac{1}{4}a(3+\sqrt{5}).$$

Es bilden aber R, r und $\frac{1}{2}a$ ein rechtwinkliches Dreieck, weil die Linie r aus dem Mittelpunkte des Dodekaëders nach dem Halbirungs-Punkte einer Kante gezogen, senkrecht auf letzterer steht; also ist

$$R=\sqrt{r^2+\tfrac{1}{4}a^2}=\tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}.$$

Und weil ferner R, ϱ und r_1 (unter r_1 den Radius eines der regulären Fünfecke verstanden) wiederum ein rechtwinkliches Dreieck bilden, so hat man noch

$$R^2=\varrho^2+r_1{}^2,$$

während $r_1=a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ ist (nach §. 135. II.).

Daraus ergiebt sich aber

$$\varrho=\tfrac{1}{4}a\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}.$$

Anmerkung. Auch hier ist wieder ϱ zu gleicher Zeit die Höhe einer der zwölf Pyramiden, in welche das Dodekaëder aus seinem Mittelpunkte zerlegt werden kann.

Körperliche Geometrie.

Fünftes Kapitel.

Von der Inhalts-Bestimmung der Oberflächen der Körper und der Körper selbst.

Erster Abschnitt.

Berechnung von Oberflächen.

§. 141. Aufgabe.

Die Oberfläche einer Pyramide zu finden.

Auflösung. 1) Man berechne den Inhalt der einzelnen Seiten-Dreiecke dadurch, daß man von der Spitze der Pyramide auf jede einzelne Seite der Grundfläche oder ihre Verlängerung, die senkrechte Linie (Höhe des jedesmaligen Seiten-Dreiecks) fällt, und in jedem Seiten-Dreieck die Grundlinie mit seiner Höhe multiplicirt und die Hälfte nimmt.

2) Man berechne auch noch den Inhalt der Grundfläche, und addire alle Resultate zusammen.

§. 142. Zusatz.

Ist die Pyramide regulär, so sind alle Seiten-Dreiecke einander gleich und man berechnet daher bloß den Inhalt eines

einzigen und multiplicirt solchen mit der Anzahl der Seiten, um den Inhalt aller Seiten-Dreiecke zu haben.

§. 143. Aufgabe.

Den Inhalt der Oberfläche einer abgekürzten Pyramide zu finden (Fig. 56.).

Auflösung. Man berechne wiederum zuerst die begrenzenden Seitenflächen, dann die beiden parallelen Grundflächen ABCD und abcd und addire alles zusammen. Aber jede Seitenfläche ist hier ein Trapez und der Inhalt eines solchen, z. B. ABab wird gefunden, wenn man die halbe Summe der beiden parallelen Grundlinien $\frac{1}{2}(AB+ab)$ mit dem senkrechten Abstande beider, multiplicirt.

Anmerkung. Man kann sich auch eine dritte Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ durchgelegt denken, parallel mit den beiden Grundflächen, welche etwa Aa halbirt, so wird solche (nach §. 32.) auch Bb, Cc und Dd halbiren. Dann ist $\alpha\beta=\frac{1}{2}(AB+ab)$; $\beta\gamma=\frac{1}{2}(BC+bc)$; $\gamma\delta=\frac{1}{2}(CD+cd)$; $\alpha\delta=\frac{1}{2}(AD+ad)$, und man kann sich dieser Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\alpha\delta$ zur Berechnung des Inhalts der einzelnen Trapeze bedienen.

Ferner kann man, wenn der Inhalt der einen Grundfläche, z. B. ABCD gefunden ist, den der andern Grundfläche abcd leicht dadurch finden, daß man zu

$$AB^2,\ ab^2 \text{ und } ABCD$$

die 4te Proportionalzahl sucht (nach §. 86.).

§. 144. Aufgabe.

Den Inhalt eines Kegelmantels zu finden, unter der Voraussetzung, daß der Kegel ein senkrechter, seine Seite $=a$ und der Radius seiner Grundfläche $=r$ ist.

Auflösung. Denkt man sich den Kegelmantel aufgewikkelt, so entsteht (nach §. 96. N. 4.) ein Sektor mit dem Radius a

und dem Bogen, dessen Länge dem Umfange der Grundfläche gleich kommt. Nun ist der Umfang der Grundfläche $=2r\pi$ und weil der Inhalt des Sektors gefunden wird, wenn man den Bogen mit dem halben Radius multiplicirt, so erhält man für den Inhalt des Kegelmantels die Formel

$$2r\pi \cdot \tfrac{1}{2}a \quad \text{oder} \quad ra\pi.$$

Beispiel. Ist der Durchmesser der Grundfläche $=4'\ 7''$ und die Seite $a=5'\ 8''$, so ist der Inhalt des Kegelmantels $=42^{\square'}\ 81^{\square''}\ 98{,}7^{\square'''}$.

§. 145. Zusatz.

Der Inhalt der Grundfläche ist $=r^2\pi$, folglich die Gesammt-Oberfläche des Kegels $=ra\pi+r^2\pi=r(a+r)\cdot\pi$.

Beispiel. Die Gesammt-Oberfläche des vorigen Kegels ist daher $=60^{\square'}\ 16^{\square''}\ 93^{\square'''}$

Anmerkung. Der Inhalt des Mantels eines schiefen Kegels kann mittelst der Sätze der Elementar-Geometrie nicht gefunden werden.

§. 146. Aufgabe.

Den Mantel eines abgekürzten Kegels ABDE zu finden, unter der Voraussetzung, daß der Kegel ein senkrechter, der Radius der untern Grundfläche $=R$, der obern dagegen $=r$ und der senkrechte Abstand beider Grundflächen $=h$ ist (Fig. 57.).

Auflösung. Man berechne den Mantel des ganzen Kegels, dann den des Ergänzungs-Kegels und ziehe letzteren Inhalt von ersterem ab.

Weil aber zur Berechnung des Mantels die Seite des Kegels erforderlich ist, so bemerke man, daß Δ ADF $\backsim$ DGH, also $AF:DF=DG:GH$, oder, wenn GH durch x bezeichnet wird,

$$R-r:h=r:x$$

d. h. $x = GH = \frac{rh}{R-r}$ und $CH = \frac{Rh}{R-r}$

ist, woraus hervorgeht

$$AH = \sqrt{AC^2 + CH^2} = \frac{R}{R-r}\sqrt{(R-r)^2 + h^2}$$

und $$DH = \frac{r}{R-r}\sqrt{(R-r)^2 + h^2}.$$

Also ist der Inhalt des ganzen Mantels

$$= R \cdot AH \cdot \pi = \frac{R^2\pi}{R-r}\sqrt{(R-r)^2 + h^2};$$

und der Inhalt des Mantels des Ergänzungs-Kegels

$$= r \cdot DH \cdot \pi = \frac{r^2\pi}{R-r}\sqrt{(R-r)^2 + h^2}.$$

Also der Inhalt des abgekürzten Mantels

$$= \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{R-r}\sqrt{(R-r)^2 + h^2} = \pi \cdot (R+r) \cdot \sqrt{(R-r)^2 + h^2}.$$

Beispiel. Ist der untere Radius 4 Fuß 7 Zoll, der obere =2 Fuß 7 Zoll, und die Höhe =3 Fuß 1 Zoll, so ist, alles in Fußen ausgedrückt,

$$R = 4{,}7;\quad r = 2{,}7;\quad R - r = 2;\quad R + r = 7{,}4;$$

$$h = 3{,}1;\quad \sqrt{(R-r)^2 + h^2} = 3{,}689$$

und der Inhalt des Kegelmantels

$$ABDE = 85^{\square'}\ 76^{\square''}\ 9^{\square'''}.$$

Note. Zu allen diesen und ähnlichen Rechnungen kann man auch die Logarithmen zu Hülfe nehmen, so nämlich, daß man, statt einen Ausdruck numerisch zu berechnen, lieber seinen Logarithmen findet, um dann die Zahl selbst dazu aus der Tabelle entnehmen zu können.

Anmerkung 1. Wird AD durch b bezeichnet und als gegeben angesehen, so ist $AD^2 = AF^2 + DF^2$, also $b = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$; und der Inhalt des abgekürzten Mantels läßt sich dann so $\pi \cdot (R+r)b$ ausdrücken, wo b das Stück der Seite des Kegels ist, welches zwischen den beiden Grundflächen liegt.

Anmerkung 2. Der abgekürzte Mantel eines schiefen Kegels läßt sich auf elementarem Wege nicht berechnen.

Anmerkung 3. Denkt man sich gerade in der Mitte von CG noch eine parallele Ebene durchgelegt, so ist die Durchschnitts-Figur ein Kreis, dessen Radius $= \frac{R+r}{2}$, und dessen Umfang $= (R+r)\pi$. — Es wird also der Inhalt eines solchen abgekürzten Kegels gefunden, wenn man diesen mittlern Durchschnitts-Umfang mit der Seite AD oder b des abgekürzten Kegels multiplicirt.

§. 147. Aufgabe.

Die Oberfläche eines beliebigen gemeinen Prisma zu finden.

Auflösung. Man berechne den Inhalt der einzelnen Seitenflächen und der Grundflächen, und addire alles zusammen.

Weil aber die einzelnen Seitenflächen Parallelogramme sind, so wird der Inhalt einer jeden einzeln gefunden, wenn man eine Seitenkante des Prisma als Grundlinie mit dem senkrechten Abstand beider zu einer Seitenfläche gehörigen Kanten als Höhe, multiplicirt. Da nun in allen Seitenflächen die Seitenkanten als Grundlinien alle einander gleich sind, so darf man nur eine der Seitenkanten, mit der Summe aller senkrechten Abstände je zweier auf einander folgenden Kanten multipliciren, um den Inhalt aller Seitenflächen auf einmal zu haben.

Man lege daher durch das Prisma eine Ebene senkrecht auf eine der Seitenkanten (also senkrecht auf jede Seitenkante), und multiplicire den Umfang dieser Durchschnitts-Figur mit einer der Seitenkanten, und man hat die Summe aller Seitenflächen (den prismatischen Umfang) auf einmal. Berechnet man nun noch den Inhalt einer der Grundflächen und addirt das Doppelte desselben zu dem Vorigen, so hat man die Gesammt-Oberfläche.

Anmerkung 1. Ist das Prisma ein senkrechtes, so steht

die Grundfläche schon senkrecht auf jeder Kante, also darf man dann nur den Umfang der Grundfläche mit einer der Seitenkanten (die jetzt auch die Höhe ist) multipliciren, um die prismatische Oberfläche, d. h. die Summe aller Seitenflächen auf einmal zu haben.

Anmerkung 2. Ist das Prisma beliebig, aber oben schief (d. h. mit der Grundfläche nicht parallel) abgeschnitten, wie z. B. ABCDEFGHJK (Fig. 58.), so ist jede der Seitenflächen, wie z. B. ABFG ein Trapez, weil die Seitenkanten immer mit einander parallel bleiben, und der Inhalt eines solchen wird gefunden, wenn man $\frac{AF+BG}{2}$ mit dem zwischen den Parallelen AF und BG liegenden senkrechten Abstande multiplicirt. — Führt man diese Multiplikation im allgemeinen aus, addirt alle Seitenflächen, um die Gesammt-Seiten-Oberfläche zu haben, so ist es leicht, die gefundene Formel umzuwandeln, und einzusehen, daß man nur jede Seitenkante multipliciren dürfe mit der halben Summe der senkrechten Abstände derselben Kante von den beiden ihr zunächst liegenden Seitenkanten, und zuletzt alles addiren, wenn man wiederum die Gesammt-Seiten-Oberfläche dieses abgekürzten Prisma erhalten will.

§. 148. Aufgabe.

Die Oberfläche eines senkrechten Cylinders zu finden, wenn r der Radius und h seine Höhe ist.

Auflösung. Nach §. 115. N. 3. ist der Mantel des Cylinders einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der Umfang der Grundfläche, dessen Höhe aber die Höhe des (senkrechten) Cylinders ist. Nun ist der Umfang der Grundfläche $2r\pi$, also der Mantel des Cylinders $= 2rh\pi$.

Addirt man zu dem Mantel noch den Inhalt der Grund-

fläche $r^2\pi$ doppelt hinzu, so hat man die Gesammt-Oberfläche $= 2rh\pi + 2r^2\pi = 2r\pi(h+r)$.

Beispiel. Ist die Höhe 5 Fuß 8 Zoll und der Durchmesser 5 Fuß 7 Zoll, so ist der Inhalt des Cylinder-Mantels $= 120^{\square'}\ 33^{\square''}\ 86^{\square'''}$.

Anmerkung. Die Oberfläche eines schiefen Cylinders läßt sich auf elementarem Wege nicht berechnen.

§. 149. Aufgabe.

Den Mantel eines Cylinders zu finden, welcher senkrecht, von welchem aber oben ein Stück abgeschnitten ist und zwar durch eine mit der Grundfläche nicht parallele Ebene (Fig. 59.).

Auflösung. Durch die Punkte C und D der obern Durchschnitts-Figur, unter der Voraussetzung, daß sie beziehlich die höchsten und niedrigsten Punkte sind, lege man Ebenen CE, DF parallel mit der Grundfläche, berechne dann den Mantel des untern Cylinders ABCE, eben so den des obern CEDF, nehme von letzterem die Hälfte und addire solche zu dem vorigen Inhalt hinzu.

Ist aber r der Radius der Grundfläche, $CA = a$, $DB = b$, so ist der untere Mantel $= 2ra\pi$ und die Hälfte des obern $= r(b-a)\pi$, also der schief abgeschnittene Mantel

$$= 2ra\pi + r(b-a)\pi = r(b+a)\pi.$$

Anmerkung. Es ist also diese Oberfläche gleich der eines Cylinder-Mantels, dessen Höhe $\frac{b+a}{2}$, d. h. das arithmetische Mittel ist, zwischen der niedrigsten und der höchsten Höhe.

Beispiel. Ist der Radius 3′ 8″ und die größte Seite 5′ 3″, die kleinste 4′ 1″, so hat man, alles in Zollen, $r = 38$, $a = 41$, $b = 53$, $a + b = 94$, und in so fern allemal $\pi = 3{,}14159$ ist, der Inhalt dieses Regelmantels $= 112^{\square'}\ 21^{\square''}\ 76^{\square'''}$.

§. 150. Lehrsatz.

Eine Kugelzone ist immer gleich dem Mantel eines Cylinders, welcher den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche, die Höhe der Zone aber zur Höhe hat (Fig. 60.).

Beweis. Es sey ABab die Kugelzone, C der Mittelpunkt der Kugel; K, k die Mittelpunkte der Parallelkreise, D in der Mitte zwischen K und k, durch D noch ein Parallelkreis DE gelegt, an E eine Tangente FG gezogen in der Ebene CDE; dann FJ senkrecht auf KH gefällt und CE gezogen; so ist Δ CDE $\sim$ Δ FJG, weil W. DCE = W. JGF ist; also hat man:

1) $CE : DE = FG : FJ$, d. h. $CE \cdot FJ = DE \cdot FG$.

Denkt man sich nun KGFk um Kk herum gedreht, wie um eine Axe, so beschreibt FG einen abgekürzten Kegel, dessen Mantel (nach §. 146.)

2) $= 2DE \cdot FG \cdot \pi$ ist.

Der Inhalt des Cylinder-Mantels MHmh, der mit der Zone dieselbe Höhe FJ = Hh und den größten Kreis der Kugel MH oder RS zur Grundfläche hat, ist aber (nach §. 148.):

3) $= 2CS \cdot Hh \cdot \pi = 2CE \cdot FJ \cdot \pi$.

Folglich sind (nach N. 1.) beide Mäntel einander gleich.

Je kleiner man sich nun den Abstand FJ denkt, desto mehr wird die Tangente FG mit dem Bogen bB zusammen fallen, desto mehr also der Mantel des abgekürzten Kegels mit der Kugelzone; und der Unterschied zwischen letzteren beiden wird im Moment des Verschwindens seyn, wenn die Höhe FJ der Zone selbst im Moment des Verschwindens ist.

Also gilt unser Lehrsatz, wenigstens für eine Zone, deren Höhe im Moment des Verschwindens, aber doch noch vorhanden ist.

Für jede andere Zone von jeder beliebigen Höhe gilt er dann

aber deshalb, weil man solche nebst dem zugehörigen Cylinder von derselben Höhe, durch beliebig und unendlich viele parallele Ebenen, in lauter solche Zonen von unendlich kleiner Höhe zerlegen kann; wenn dann jede einzelne Zone, jedem einzelnen Cylinder-Mantel gleich ist, so ist auch die Summe aller Zonen, der Summe aller Cylinder-Mäntel gleich.

Anmerkung. Wollte man diesen Beweis strenger haben, so müßte noch Bb=FG gezogen werden, welche die DE in L schneidet. Denn ist der Mantel des abgekürzten Kegels KkBb offenbar kleiner als die Kugelzone und sein Inhalt $=2DL\cdot Bb\cdot\pi$ $=2(DE-LE)\cdot FG\cdot\pi=2DE\cdot FG\cdot\pi-2LE\cdot FG\cdot\pi$; wo der Minuend nichts anders ist, als der Mantel des abgekürzten Kegels KkFG.

Je kleiner nun die Höhe der Zone wird, desto näher fällt die Sehne Bb mit dem Bogen zusammen, desto kleiner wird also das Stückchen LE zwischen der Sehne und dem Bogen, im Vergleiche mit DE, desto näher rückt daher der Inhalt des abgekürzten Kegels KkBb der Kugelzone und auch dem Inhalte $2DE\cdot FG\cdot\pi$, d. h. dem Inhalte $2CE\cdot Hh\cdot\pi$, d. h. dem Inhalte des Cylinder-Mantels MHmh, und kann von beiden um weniger verschieden werden, als jede noch so klein gedachte Größe. Es bilden also die Kugelzone und der Cylinder-Mantel Grenzen, welchen sich der Inhalt des abgekürzten Kegel-Mantels KkBb immer nähert, und denen beiden er so nahe kommen kann, als er nur immer will, wenn man nur die Höhe klein genug denkt. Also können diese Grenzen selbst nicht mehr von einander verschieden seyn und es ist die Kugelzone dem Cylinder-Mantel gleich, zunächst für den Fall, daß die Höhe unendlich klein ist; dann für jede Höhe.

Note. Ganz strenge werden dergleichen Beweise auf analytischem (rein calculativem) Wege geführt, indem man unendliche Grenzreihen zu Hülfe nimmt (also alle Ausdrücke auf diese gemeinschaftliche Form bringt) und vorher ein für allemal strenge bewiesen hat, wie andere Reihen, die zwischen diesen Grenzreihen liegen müssen, in ihren ersten Gliedern beschaffen sind.

Dieser Weg führt auch zunächst zur Differential-Rechnung auf empirischen Wege, aber im Lagrange'schen Sinne.

§. 151. Zusätze.

1) Eine Calotte AUB der Kugel ist daher auch dem Cylinder-Mantel MHVZ gleich, der mit der Calotte gleiche Höhe hat, und dessen Grundfläche ein größter Kreis der Kugel ist.

Man darf sich nur mehrere parallele Ebenen durchgelegt denken, so sieht man den Zusammenhang dieses Satzes mit dem nächst vorhergehenden (§. 150.) sogleich ein.

2) Die Oberfläche der Halbkugel RUS ist deshalb auch dem Cylinder-Mantel RSVZ gleich, welcher ihren größten Kreis zur Grundfläche, den Radius derselben CU oder SV aber zur Höhe hat.

3) Deshalb ist auch die ganze Kugelfläche dem Cylinder-Mantel gleich, welcher den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche, den Durchmesser der Kugel aber zur Höhe hat.

§. 152. Aufgabe.

Die Oberfläche einer Kugel zu finden, deren Radius $= r$ gegeben ist.

Auflösung. Nach §. 151. N. 3. und §. 148. ist diese Oberfläche $= 2r\pi \times 2r = 4r^2\pi$.

Beispiel. Ist daher der Durchmesser der Kugel 1′ 7″, mithin $2r = 17$ alles in Zollen ausgedrückt, so hat man die Kugelfläche $= 37^{\square'}$ $91^{\square''}$ $90^{\square'''}$.

§. 153. Zusatz.

Weil aber $r^2\pi$ der Inhalt des größten Kreises der Kugel ist, so ist die Oberfläche der Kugel allemal das vierfache ihres größten Kreises.

§. 154. Aufgabe.

Den Inhalt einer Kugelzone anzugeben, deren Höhe h ist, während r den Radius der Kugel vorstellt.

Auflösung. Es ist solcher $= 2rh\pi$ (§. 150.).

§. 155. Aufgabe.

Den Inhalt einer Calotte anzugeben, deren Höhe $= h$, während der Kugelradius $= r$ ist.

Auflösung. Es ist solcher $= 2rh\pi$ (§. 151. N. 1.).

§. 156. Zusatz.

Will man die Gesammt-Oberfläche des Kugelabschnitts AUB angeben, so muß noch der Inhalt des begrenzenden Kreises AKB angegeben und zu der Calotte addirt werden. Es ist aber der Radius $KB = \sqrt{CB^2 - CK^2}$ und $CB = r$, $CK = r - h$, also $KB = \sqrt{2rh - h^2} = \sqrt{h(2r - h)}$; folglich der Inhalt des Kreises $AKB = h(2r - h)\pi$. — Mithin die Gesammt-Oberfläche des Kugelabschnitts $AUB = 2rh\pi + h(2r - h)\pi = (4r - h)h\pi$.

§. 157. Aufgabe.

Die Oberfläche eines Kugelsektors ACBU zu finden, wenn r der Radius der Kugel ist und wenn der Winkel ACB, n Grade hat (Fig. 60.).

Auflösung. Man berechne zuerst den Mantel des Kegels AKBC, dann den Inhalt der Calotte AUB und addire beides.

Es ist aber Radius $AK = r \cdot \sin \frac{1}{2}n$, also der Umfang des Kreises AKB, $= 2r\pi \cdot \sin \frac{1}{2}n$; und weil die Seite des Kegels $CA = r$ ist, so ist der Inhalt des Kegelmantes AKBC (nach §. 145.), $= r^2\pi \cdot \sin \frac{1}{2}n$ *). — Die Höhe KU der

*) Daraus folgt zugleich, daß, wird der Kegelmantel aufgerollt, ein Sektor entsteht, der sich zu seinem ganzen Kreise $r^2\pi$ verhält, wie $\sin \frac{1}{2}n$ zu 1.

Calotte ist $CU - CK = r - r \cdot \cos\frac{1}{2}n = r(1 - \cos\frac{1}{2}n)$; folglich ist der Inhalt der Calotte $= 2r^2\pi \cdot (1 - \cos\frac{1}{2}n)$ oder $= 4r^2\pi \cdot \sin^2\frac{1}{4}n$ *). — Also ist die Gesammt-Oberfläche des Kugelausschnitts $= r^2\pi(\sin\frac{1}{2}n + 4\sin^2\frac{1}{4}n)$.

§. 158. Aufgabe.

Die Oberfläche des sphärischen Zweiecks QAPMQ (Fig. 51.) zu finden, zwischen zwei größten Kreisen QAP und QMP, wenn der sphärische Winkel APM bekannt und $= n^0$, und r der Radius der Kugel ist.

Auflösung. Es verhalten sich zwei solche Kugelzweiecke (wie QMPAQ) zu einander, wie die Winkel, welche die sie begrenzenden Kreis-Ebenen mit einander bilden. Daher verhält sich auch das Zweieck QAPMQ zu der ganzen Kugel-Oberfläche, wie n^0 zu 360^0. — Also hat man, wenn die Kugelfläche durch O vorgestellt wird, $QAPMQ = \frac{n \cdot O}{360}$. — Es ist aber $O = 4r^2\pi$; also $QAPMQ = \frac{4nr^2\pi}{360} = \frac{nr^2\pi}{90}$.

§. 159. Zusatz.

Bedeutet α die Länge des Bogens, der den Radius 1 und den Centriwinkel n^0 hat, so ist

$$\alpha = \frac{2n\pi}{360} \quad \text{und} \quad n = 180\frac{\alpha}{\pi}.$$

Und wird dieser Werth statt n in die eben gefundene Formel für den Inhalt des sphärischen Zweieckes substituirt, so ergiebt sich solcher auch unter der Form $2\alpha r^2$.

§. 160. Aufgabe.

Den Inhalt eines sphärischen Dreiecks ABC (Fig. 61.) zu

*) Die Oberfläche der Calotte verhält sich daher zur ganzen Kugelfläche $4r^2\pi$, wie $\sin^2\frac{1}{4}n$ zu 1.

finden, dessen drei sphärische Winkel A, B, C bezüglich n^0, p^0, q^0 haben, während r den Radius der Kugel vorstellt.

Auflösung. Die drei größten Kreise, welche das sphärische Dreieck bilden, nach allen Seiten verlängert, zerlegen die ganze Kugel-Oberfläche in acht sphärische Dreiecke, von denen jedoch je zwei gegenüberliegende einander gleich sind, so daß vier derselben, unter denen nicht zwei gegenüberliegende sind, die Oberfläche der Halbkugel ausmachen. Nimmt man daher die dem ABC anliegenden Dreiecke BCa, ACb und ABc, so machen sie mit dem gegebenen ABC die Oberfläche der Halbkugel aus.

Nun ist aber (nach §. 158.):

$$\text{Zweieck } ABaCA = ABC + BCa = \frac{n \cdot r^2\pi}{90},$$

$$\text{Zweieck } BCbAB = ABC + ACb = \frac{p \cdot r^2\pi}{90},$$

$$\text{Zweieck } CBcAC = ABC + BAc = \frac{q \cdot r^2\pi}{90}.$$

Also, wenn man links und rechts addirt, und die Kugelfläche durch O bezeichnet,

$$2\,ABC + \tfrac{1}{2}O = \frac{(n+p+q)r^2\pi}{90};$$

aber $\tfrac{1}{2}O = 2r^2\pi$;

also, wenn man subtrahirt und durch 2 dividirt,

$$ABC = \left[\frac{(n+p+q)}{180} - 1\right] \cdot r^2\pi.$$

§. 161. Zusatz.

Bedeuten α, β, γ die Bogen, deren Radius 1, deren Centriwinkel aber bezüglich n, p, q Grade haben, so ist

$$\alpha = \frac{n \cdot \pi}{180},\quad \beta = \frac{p \cdot \pi}{180},\quad \gamma = \frac{q \cdot \pi}{180};$$

also wird dann der Inhalt des sphärischen Dreiecks

$$ABC = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2.$$

§. 162. Aufgabe.

Von einem sphärischen Vielecke sind alle Winkel oder vielmehr die zu ihnen für den Radius 1 gehörigen Bogen, α, β, γ, δ, ꝛc. zuletzt ν, gegeben. Man soll den Inhalt des Vielecks finden, wenn der Radius der Kugel $= r$ angenommen wird.

Auflösung. Man zerlege das Vieleck durch Diagonal-Ebenen in lauter Dreiecke, drücke den Inhalt aller einzelnen Dreiecke (nach §. 161.) aus, die unbekannten Winkel derselben einstweilen durch Buchstaben bezeichnend, und addire diese Resultate, so erhält man für den Inhalt des sphärischen Vielecks, nach völlig beendigter Rechnung,

$$(\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \nu - \pi)r^2.$$

§. 163. Aufgabe.

Von den fünf regulären Körpern die Oberfläche zu finden, wenn in jedem die Seite der regulären begrenzenden ebenen Figur $= a$ ist.

Auflösung. 1) Für das Tetraëder findet sich von einem der vier gleichseitigen Dreiecke die Grundlinie $= a$, die Höhe $= \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, folglich der Inhalt eines der Dreiecke $= \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Daher die Oberfläche des Tetraëder $= a^2\sqrt{3}$.

2) Die Oberfläche des Octaëders $= 2a^2\sqrt{3}$.

3) Die Oberfläche des Icosaëders $= 5a^2\sqrt{3}$.

4) Im Hexaëder (Würfel, Kubus) ist der Inhalt eines Quadrats $= a^2$, also die Oberfläche $= 6a^2$.

5) Im Dodekaëder muß man zuerst den Inhalt des regulären Fünfecks finden, dessen Seite $= a$ ist. Zu dem Ende denke man sich einen Kreis herum beschrieben, bezeichne seinen Radius durch ϱ, und finde erstlich ϱ, dann aber die Höhe h ei-

nes der fünf Dreiecke, in welche das reguläre Fünfeck aus dem Mittelpunkte zerlegt werden kann (§. 135.). Man findet dann

$$\varrho = \frac{2a^2}{5-\sqrt{5}} = a\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}},$$

und $h = \sqrt{\varrho^2 - \frac{1}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$.

Also ist der Inhalt eines der Dreiecke

$$= \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}};$$

und der Inhalt des regulären Fünfecks

$$= 5\left(\frac{1}{4}a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}};$$

also zuletzt die Oberfläche des Dodekaëders

$$= 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}.$$

Note. Für den praktischen Gebrauch würde man besser thun, den Inhalt des regulären Fünfecks trigonometrisch zu berechnen. Es ist nämlich der Centriwinkel eines dieser Dreiecke $\frac{360}{5}°$ oder 72°, jeder der beiden andern Winkel 54°; also ist

$$\varrho = \frac{a \cdot \sin 54°}{\sin 72°} \quad \text{und} \quad h = \tfrac{1}{2}a \cdot tg\, 54°$$

und der Inhalt eines der Dreiecke

$$= \tfrac{1}{2}ah = \tfrac{1}{4}a^2 \cdot tg\, 54°;$$

also der Inhalt des regulären Fünfecks

$$= \tfrac{5}{4}a^2 \cdot tg\, 54°;$$

und die Oberfläche des Dodekaëders

$$= 15a^2 \cdot tg\, 54°.$$

Schluß-Anmerkung zum ersten Abschnitt.

Sollte endlich von irgend einem gegebenen Körper die Oberfläche gefunden werden, so suche man dieselbe in lauter solche Theile zu zerlegen, deren Inhalt einzeln nach einem der vorhergehenden Paragraphen gefunden werden kann. —

Bei, von krummen Flächen begrenzten Körpern werden die bisher vorgetragenen Elemente nicht immer ausreichen, und man wird in vielen dergleichen Fällen zu Betrachtungen seine Zuflucht nehmen müssen, welche der höhern Geometrie eigenthümlich sind. — Für den praktischen Bedarf

wird es jedoch in vielen Fällen ausreichen, statt der krummen Begrenzungsflächen lieber einzelne, wenn auch kleine Ebenen sich zu denken, welche sich den krummen so viel wie möglich nähern. Und man könnte sich solche ebene Begrenzungsflächen denken, welche die krumme Fläche berühren, auch solche, welche sie schneiden. Die erstere Oberfläche wäre dann größer, die andere kleiner, wie die gesuchte; und wenn der Unterschied zwischen der äußern und innern Oberfläche klein genug gefunden wird, so wird die krumme Oberfläche von jeder der beiden Näherungs-Oberflächen noch weniger verschieden seyn; und dann wird also eine der beiden Grenzen statt der krummen Oberfläche mit hinreichender Genauigkeit genommen werden können.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung des körperlichen Inhalts.

§. 164. Lehrsatz.

Zwei rechtwinkliche Parallelepipeda ABCDH und abcdh (Fig. 62.), wenn zwei zusammenstoßende Kanten in beiden dieselben sind, z. B. AB=ab, Bc=bc, verhalten sich, wie die dritte Kante, nämlich

$$ABCDH : abcdh = BF : bf$$

Beweis. Denn nach der Voraussetzung sind die Grundflächen congruente Rechtecke ABCD und abcd. Denkt man sich daher die dritten Kanten BF und bf durch ein gemeinschaftliches Linien-Gemäß (Linien-Einheit) gemessen, und ist solches in BF m mal, in bf dagegen n mal enthalten (z. B. fünfmal und dreimal), so kann man in beiden Parallelepipeden durch die Theilungs-Punkte Ebenen legen, parallel mit den Grundflächen. Dadurch werden die beiden Parallelepipeden in lauter kleinere und congruente Parallelepipeda zerlegt, und zwar das erstere in m (5) das andere dagegen in n (3) dergleichen. Während daher das Verhältniß der dritten Kanten BF und bf (die hier auch die Höhen sind) = m : n gefunden wurde, findet sich das Verhältniß der Parallelepipeda ABCDH und abcdh ebenfalls = m : n.

§. 165. Lehrsatz.

Wenn in zwei rechtwinklichen Parallelepipeden eine Kante nur dieselbe ist, so verhalten sich die Parallelepipeda wie das Produkt der beiden andern Kanten, oder wenn man die erstere gleiche Kante als Höhe sich denkt, so verhalten sich die Parallelepipeda wie die Grundflächen.

Es haben z. B. die Parallelepipeda P und p bezüglich die drei Kanten A, B, γ und a, b, γ, so daß die dritte Kante γ in beiden dieselbe ist, so wird seyn

$$P:p = A\cdot B:a\cdot b.$$

Beweis. Denn man denke sich ein drittes Parallelepipedum Π, welches die Kanten A, b, γ haben mag, so wird sein (nach §. 164.):

$$P:\Pi = B:b$$
$$\Pi:p = A:a,$$

folglich, wenn man links und rechts multiplicirt,

$$P:p = A\cdot B:a\cdot b.$$

§. 166. Zusätze.

1) Es verhalten sich daher zwei beliebige gemeine Prismen, wenn sie gleiche Grundflächen haben, wie ihre Höhen.

Denn jedes dieser Prismen läßt sich in ein gleiches rechtwinkliches Parallelepipedum verwandelt denken, welches die Höhe zur dritten Kante hat, und ein der Grundfläche gleiches und in beiden Parallelepipeden congruentes Rechteck zur Grundfläche. Also folgt der Satz unmittelbar aus §. 164.

2) Zwei beliebige gemeine Prismen, wenn sie gleiche Höhen haben, verhalten sich zu einander, wie ihre Grundflächen (aus §. 165.).

3) Zwei ganz beliebige gemeine Prismen verhalten sich wie das Produkt aus den Grundflächen in ihre Höhen. — Sind z. B. P und p zwei solche ganz beliebige Prismen, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen, so ist allemal

$$P:p = G\cdot H:g\cdot h.$$

Denn man denke sich ein drittes Prisma Π mit der Grundfläche G und der Höhe h, so hat man (nach N. 1.):

$$P : \Pi = H : h$$

und (nach 2.): $$\Pi : p = G : g;$$

folglich, wenn man multiplicirt:

$$P : p = G \cdot H : g \cdot h \text{ *).}$$

§. 167. Lehrsatz.

Das Maaß oder der Inhalt **) eines Prisma P in Bezug auf einen Würfel k^c (Kubus) als Einheit (Gemäß) wird gefunden, wenn man die Grundfläche G desselben mit dem Quadrat der Kante des Würfels (d. h. mit der Grundfläche des Würfels), und die Höhe H des Prisma mit der Kante (auch Höhe) des Würfels mißt und dann das Maaß der Grundfläche mit dem Maaße der Höhe multiplicirt.

Beweis. Ist k die Kante des Würfels, k^q das Quadrat derselben k^c der Würfel selbst, so hat man (nach §. 166. N. 3.):

$$1)\ P : k^c = G \cdot H : k^q \cdot k,$$

unter der Voraussetzung, daß die Grundflächen G und k^q durch einerlei Flächen-Einheit und die Höhen H und k durch einerlei Längen-Einheit gemessen sind, und daß in der Gleichung 1.) G und k^q, H und k die dadurch entstandenen Zahlen vorstellen.

Nimmt man daher das Quadrat k^q selber als Flächengemäß, so ist das durch k^q (in N. 1.) vorgestellte Maaß, $= 1$, und nimmt man die Kante

---

*) Es versteht sich in allen diesen Sätzen, daß die Körper durch einerlei Einheit, und die Flächen durch einerlei Flächen-Einheit, und die Linien durch einerlei Linien-Einheit gemessen sind, und daß die Maaße (absolute ganze oder gebrochene Zahlen) es sind, von deren Multiplikation gesprochen werden kann. — Wenn man den Zusamenhang mit dem frühern übersieht, so wird man leicht finden, daß auch jedesmal die geführten Beweise nur unter dieser Voraussetzung gelten.

**) D. h. die absolute ganze oder gebrochene Zahl, welche anzeigt, wie oft der Würfel oder ein bestimmter Theil desselben in dem Prisma enthalten ist.

k selber als Liniengemäß, so ist das (in N. 1.) durch k vorgestellte Maaß ebenfalls, = 1. Unter diesen Voraussetzungen bekommt die Gleichung N. 1. die Form

$$2)\ P : k^c = G \cdot H : 1 \cdot 1$$

oder

$$3)\ P = (G \cdot H) \cdot k^c,$$

wo G und H die Zahlen vorstellen, welche man als Maaße erhält, wenn die Grundfläche G durch k^q, und die Höhe H durch k gemessen worden sind.

Anmerkung. Man pflegt ein für allemal vorauszusetzen, daß die Linien mit einer beliebigen Linien-Einheit k, die Flächen mit dem über k construirten Quadrat k^q als Flächen-Einheit, endlich die Körper allemal durch den mit der Kante k construirten Würfel oder Kubus k^c gemessen werden, und unter dieser Voraussetzung drückt man den Lehrsatz auch kurz mit folgenden Worten aus, als: „der Inhalt eines beliebigen gemeinen Prisma „wird gefunden, wenn man seine Grundfläche mit seiner Höhe „multiplicirt."

Auch hier mag diese Voraussetzung für die Folge ein für allemal fest stehen. Nur muß man noch bemerken, daß der Würfel, dessen Kante ein Fuß, Zoll, Linie, Ruthe u. s. w. ist, bezüglich Kubikfuß, Kubikzoll, Kubiklinie, Kubikruthe, 2c. 2c. genannt wird.

Man vergleiche noch, was in der ebenen Geometrie (Band II.) über das Messen oder die Inhalts-Bestimmung der Flächen-Figuren gesagt ist.

§. 168. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Cylinders zu finden.

Auflösung. Man multiplicire seine Grundfläche mit seiner Höhe (nach §§. 167. und 117.).

Ist also der Radius der Grundfläche = r, so ist der Inhalt der Grundfläche $= r^2\pi$ und der Inhalt des Cylinders $= r^2 \cdot h \cdot \pi$, wenn h seine Höhe ist.

Note. Wird also r und h in Fußen gegeben, so drückt $r^2h\pi$ die Zahl der Kubikfuße aus, welche der Cylinder enthält.

Ist aber r und h die Zahl der Zolle, so ist $r^2h\pi$ die Zahl der Kubikzolle, welche in dem Cylinder enthalten sind.

Beispiel. Ist der Durchmesser des Cylinders 2′ 8″ und die Höhe desselben 5′ 4″ 2‴, so hat man in Zollen $r=14$, $h=54{,}2$; und der Inhalt des Cylinders ist $=33^{c\prime}\ 373^{c\prime\prime}\ 739^{c\prime\prime\prime}$, d. h. 33 Kubikfuß, 373 Kubikzoll und 739 Kubiklinien.

§. 169. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines senkrechten Cylinders zu finden, welcher oben durch eine mit der Grundfläche nicht parallele Ebene abgeschnitten ist.

Auflösung. Man denke sich durch den niedrigsten und den höchsten Punkt der obern Durchschnitts-Figur Ebenen parallel mit der Grundfläche gelegt, berechne den Inhalt des untern Cylinders, dann auch den des obern, nehme von letzterem die Hälfte und addire solche zu dem erstern Inhalt.

Ist also r der Radius der Grundfläche, und sind a, b bezüglich die senkrechten Abstände des niedrigsten und des höchsten Punktes von der Grundfläche, so ist der Inhalt des untern Cylinders $=r^2a\pi$, der des obern $=r^2(b-a)\pi$; also der Inhalt des schief abgeschnittenen

$$=r^2\pi\cdot\frac{b+a}{2}.$$

Anmerkung. Es ist also der Inhalt eines abgekürzten senkrechten Cylinders dem eines gemeinen Cylinders gleich, welcher die halbe Summe der größten und kleinsten Seite zur Höhe hat.

§. 170. Aufgabe.

Den Inhalt einer beliebigen Pyramide oder eines beliebigen Kegels zu finden.

Auflösung. Man multiplicire die Grundfläche mit der Höhe und nehme davon den dritten Theil (nach §. 118. N. 2.).

Ist im Kegel, r der Radius der Grundfläche, h seine Höhe (der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche), so ist der körperliche Inhalt des Kegels

$$= \tfrac{1}{3} r^2 h \pi = \frac{r^2 h \pi}{3}.$$

§. 171a. Aufgabe.

Den Inhalt einer parallel mit der Grundfläche abgekürzten Pyramide zu finden.

Auflösung. Man berechne den Inhalt der ganzen Pyramide, dann den Inhalt der Ergänzungs-Pyramide und ziehe den letzteren vom ersteren ab.

Um aber diese beiden Pyramiden berechnen zu können, muß man vor allen Dingen ihre bezüglichen Höhen finden. Denkt man sich aber (Fig. 56.) von E aus auf die Grundflächen die senkrechte EHh gefällt, und den senkrechten Abstand der beiden parallelen Grundflächen Hh als gegeben und $= a$, ferner Eh als gesucht und $= x$, so hat man bekanntlich

$$AB : ab = AE : aE = EH : Eh$$

also, wenn $AB = m$ und $ab = n$ als gegeben angesehen werden,

$$m : n = a + x : x$$

oder

$$m - n : n = a : x,$$

also

$$Eh = x = \frac{an}{m-n}$$

und

$$EH = a + x = \frac{am}{m-n}.$$

Ist nun der Inhalt der untern Grundfläche ABCD, $= G$, so ist der Inhalt der ganzen Pyramide $= \tfrac{1}{3} G \cdot \frac{am}{m-n}$; und ist g der Inhalt der obern Grundfläche, so ist der Inhalt der obern Pyramide $= \tfrac{1}{3} g \cdot \frac{an}{m-n}$.

Folglich ist der Inhalt der abgekürzten Pyramide

$$= \frac{1}{3}\frac{a}{m-n}(mG-ng).$$

§. 172. Zusatz.

Es ist aber $G:g = m^2:n^2$,

oder $\sqrt{G}:\sqrt{g} = m:n$,

oder $\sqrt{G}-\sqrt{g}:\sqrt{g} = m-n:n$;

auch $\sqrt{G}-\sqrt{g}:\sqrt{G} = m-n:m$,

also $\frac{n}{m-n} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$ und $\frac{m}{m-n} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$;

und diese Werthe, in der vorstehenden Inhalts-Formel substituirt, geben den gesuchten Inhalt der abgekürzten Pyramide

$$= \frac{1}{3}a\cdot\frac{G\cdot\sqrt{G}-g\cdot\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} = \frac{1}{3}a\cdot\left(\frac{G^2-g^2+(G-g)\sqrt{Gg}}{G-g}\right)$$

$$= \frac{1}{3}a(G+g+\sqrt{Gg}).$$

§. 173. Aufgabe.

Den Inhalt des durch eine, mit der Grundfläche parallele Ebene abgekürzten Kegels zu finden.

Auflösung. Von dem Inhalte des ganzen Kegels ziehe man den Inhalt des Ergänzungskegels ab.

Um hier die bezüglichen Höhen zu finden, sey (Fig. 57.) $AC = R$, $DG = r$, $CG = DF = h$, und $GH = x$, so hat man

$$AF:DF = DG:GH,$$

d. h. $$R-r:h = r:x;$$

also $$x = GH = \frac{hr}{R-r};$$

und daraus $$CH = \frac{hR}{R-r};$$

also ist der Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{1}{3}h\frac{R^3\pi}{R-r}$, der Inhalt

des Ergänzungskegels $= \frac{1}{3} h \frac{r^3 \pi}{R - r}$; folglich der Inhalt des abgekürzten Kegels

$$= \frac{1}{3} h \pi \frac{R^3 - r^3}{R - r} = \frac{1}{3} h \pi (R^2 + Rr + r^2).$$

Beispiel. Ist die Höhe CG $= 4'\ 7''$; — der Durchmesser der untern Grundfläche $= 5'\ 3''$, der obern dagegen $3'\ 8''$, so hat man, alles in Fußen ausgedrückt,

$$h = 4{,}7; \quad R = 2{,}65; \quad r = 1{,}9$$

und $R^2 + Rr + r^2 = 15{,}6675$; und der Inhalt des abgekürzten Kegels $= 77$ Kubikfuß 112 Kubikzoll und 683 Kubiklinien.

§. 174. Aufgabe.

Den Inhalt einer Kugel zu finden, deren Radius $= r$ und gegeben ist.

Auflösung. Man kann die Kugel durch unendlich viele aus dem Mittelpunkte auslaufende Linien in unendlich viele pyramidenartige Körperchen zerlegen, die sich desto mehr einer Pyramide nähern werden, je kleiner man sich die Stückchen der Kugelfläche denkt, die den Pyramiden zur Grundfläche dienen sollen. Für eine solche, mit einer unendlich kleinen Grundfläche versehenen, Pyramide ist der Radius r als Höhe anzunehmen; und den Inhalt aller dieser Pyramidchen findet man, wenn man jede einzelne der unendlich kleinen Grundflächen mit dem dritten Theile der Höhe (d. h. des Radius) multiplicirt und alles addirt; oder auch, wenn man zuerst alle Grundflächen addirt, wodurch die Kugelfläche selbst erhalten wird, und diese Summe auf einmal mit dem dritten Theile des Radius multiplicirt [nach der Formel $a \cdot \frac{1}{3} r + b \cdot \frac{1}{3} r + c \cdot \frac{1}{3} r + \cdots = (a + b + c \cdots) \frac{1}{3} r$.].

Bezeichnet man daher die Kugel-Oberfläche mit O und den körperlichen Inhalt mit K, so hat man

$$K = O \times \frac{1}{3} r \quad \text{oder} \quad K = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Beispiel. Ist der Durchmesser einer Kugel 3 Fuß 8 Zoll, so ist,

alles in Zollen ausgedrückt, $r=19$, also $r^3=6859$ und $K=\frac{4}{3}r^3\pi$ $=28730,88775$; d. h. der Inhalt der Kugel ist $28^{c\prime}\ 730^{c\prime\prime}\ 887\frac{3}{4}^{c\prime\prime\prime}$.

Note. Wollte man recht strenge seyn, so müßte man sich ebene Körper, oder Cylinder-Aggregate, sowohl in die Kugel hinein, als auch um die Kugel herum beschrieben denken, den Inhalt beider berechnen, und dann nachweisen, wie sich sowohl der innere als der äußere Körper immer fort und ohne Ende der Kugel selbst mehr und mehr nähern kann, während ihre Inhalte sich dabei fortwährend einander und dem Werthe $\frac{4}{3}r^3\pi$ nähern, der immer zwischen ihnen liegt, obgleich sie selbst von einander weniger verschieden seyn können, als jede gegebene noch so kleine Größe. — Auf diese Weise hat man in der ebenen Geometrie (Bd. II.) den Inhalt der Kreisfläche gefunden.

§. 175. Zusatz.

Denkt man sich um die Kugel einen senkrechten Cylinder beschrieben, dessen beide Grundflächen, so wie sein Mantel, die Kugel berühren, der also den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat; und bezeichnet man den körperlichen Inhalt dieses Cylinders durch C, so hat man (nach §. 168.):

$$C=r^2\pi\times 2r=2r^3\pi.$$

Aber im vorhergehenden §. 174. wurde gefunden

$$K=\frac{4}{3}r^3\pi$$

also ist

$$K=\frac{2}{3}C;$$

d. h. die Kugel ist genau zwei Drittheil des um sie beschriebenen Cylinders.

§. 176. Aufgabe.

Den Inhalt eines Kugel-Ausschnitts zu finden, welcher an seiner Spitze den Winkel $=n^0$ hat, während der Radius der Kugel $=r$ ist (Fig. 60.).

Auflösung. Aus denselben Gründen, welche in der Auflösung des §. 174. angeführt sind, findet man den Inhalt des Kugelsektors, wenn man die Calotte, welche seine Grundfläche bildet, mit dem dritten Theile des Radius multiplicirt.

Ist aber (Fig. 60.) W. $ACB=n$, so ist $CK=r\cdot cos\,\frac{1}{2}n$

also $KU = r - r\,cos\,\frac{1}{2}n = r(1 - cos\,\frac{1}{2}n) = 2r \cdot sin^2\,\frac{1}{4}n$; und der Flächen-Inhalt der Calotte

$$AUB = 2r\pi \times 2r \cdot sin^2\,\tfrac{1}{4}n = 4r^2\pi \cdot sin^2\,\tfrac{1}{4}n$$

(vergl. §. 157.); mithin ist der Inhalt des Kugel-Ausschnitts

$$= 4r^2\pi \cdot sin^2\,\tfrac{1}{4}n \times \tfrac{1}{3}r = \tfrac{4}{3}r^3\pi \cdot sin^2\,\tfrac{1}{4}n\ *).$$

Wird daher der Inhalt des Kugel-Ausschnitts durch S bezeichnet, so hat man

$$S = \tfrac{4}{3}r^3\pi \cdot sin^2\,\tfrac{1}{4}n.$$

Beispiel. Ist, wie oben, der Radius der Kugel $= 1'\ 9''$ und der Winkel $ACB = 54^\circ\ 27'\ 36''$, so hat man, wenn man alles in Fußen ausdrückt und Logarithmen zu Hülfe nimmt: $r = 1{,}9$; $\frac{1}{4}n = 13^\circ\ 36'\ 54''$ und

	$10 + log\ sin\,\frac{1}{4}n =$	9,3718001;	$log\ r = 0{,}2787536$
	$20 + 2\,log\ sin\,\frac{1}{4}n =$	18,7436002;	$3 \cdot log\ r = 0{,}8362608$
addirt	$3\,log\ r =$	0,8362608	
addirt	$log\ \pi =$	0,4971495	
addirt	$log\ 4 =$	0,6020600	
		0,6790705	
subtrahirt	$log\ 3 =$	0,4771213	
	$log\ S =$	0,2019492	
und hieraus	$S =$	1,592023	

d. h. der Inhalt des Kugelsektors ist $1^{c\prime}\ 592^{c\prime\prime}$ und $23^{c\prime\prime\prime}$.

§. 177. Aufgabe.

Den Inhalt (des Kugel-Abschnitts) AUB zu finden (Fig. 60.), wenn seine Höhe $KU = h$ und der Radius der Kugel $= r$ ist.

Auflösung. Man berechne den Inhalt des Kugel-Ausschnitts AUBCA, dann den Inhalt des Kegels ABCA und ziehe letzteren von ersterem ab.

Es ist aber der Flächen-Inhalt der Calotte (nach §. 151. N. 1.) $= 2rh\pi$; also der Inhalt des Kugel-Ausschnitts $= 2rh\pi \times \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}r^2h\pi$. — Ferner ist die Höhe des Kegels

*) Es verhält sich daher der Kugel-Ausschnitt zu der ganzen Kugel, wie $sin^2\,\frac{1}{4}n$ zu 1.

ABCA, d. h. die Linie CK, $=r-h$ und der Radius der Grundfläche, nämlich KB,

$$=\sqrt{CB^2-CK^2}=\sqrt{r^2-(r-h)^2}=\sqrt{2rh-h^2};$$

folglich ist der Inhalt der Grundfläche des Kegels $=(2rh-h^2)\pi$; und der Inhalt des Kegels ist demnach

$$=(2rh-h^2)\pi\times\tfrac{1}{3}(r-h)=\tfrac{1}{3}\cdot(2r-h)(r-h)h\cdot\pi.$$

Also findet sich der Inhalt des Kugel-Abschnitts

$$=\tfrac{1}{3}h\pi[2r^2-(2r-h)(r-h)]=\tfrac{1}{3}h\pi(3hr-h^2)=\tfrac{1}{3}h^2\cdot(3r-h)\pi.$$

§. 178. Aufgabe.

Den Inhalt einer körperlichen Zone ABab zu finden (Fig. 60.), wenn der Radius der Kugel $=r$, die Höhe der Zone $Kk=h$ und der Abstand der größern Grundfläche vom Mittelpunkte $CK=a$ gegeben ist.

Auflösung. Man berechne den Inhalt der Kugel-Abschnitte AUB und aUb, und ziehe letzteren von ersterem ab.

Es ist aber (nach §. 177.) der Inhalt

$$AUB=\tfrac{1}{3}(r-a)^2(2r+a)\pi,$$

und der Inhalt

$$aUb=\tfrac{1}{3}(r-a-h)^2(2r+a+h)\pi;$$

folglich der Inhalt

$$ABab=\tfrac{1}{3}\pi\cdot[(r+a)^2(2r+a)-(r-a-h)^2(2r+a+h)].$$

§. 179. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt des von zwei, unter dem Winkel n^0 sich schneidenden größten Kreisen und dem dazwischen liegenden sphärischen Zweieck, begrenzten Körpers zu finden, der durch V bezeichnet seyn mag.

Auflösung. Der Flächen-Inhalt des sphärischen Zweiecks ist $=\frac{n}{360}\cdot 4r^2\pi=\frac{nr^2\pi}{90}$. — Dieser mit dem dritten Theile des Radius multiplicirt, giebt $\frac{nr^3\pi}{270}$ für den ge-

suchten körperlichen Inhalt; nach den bereits in der Auflösung zu §. 174. angeführten Gründen.

Note. Man kann auch so schließen: Ist K der Inhalt der ganzen Kugelfläche, so ist $K : V = 360^0 : n^0$, also

$$V = \frac{n}{360} \cdot K = \frac{n}{360} \cdot \tfrac{4}{3} r^3 \pi = \frac{n r^3 \pi}{270}.$$

§. 180. Aufgabe.

Den Inhalt des körperlichen Dreiecks zu finden, dessen Spitze in dem Mittelpunkte einer Kugel liegt, und welches auf der vierten Seite von dem sphärischen Dreiecke begrenzt wird.

Auflösung. Man multiplicire den Inhalt des sphärischen Dreiecks mit dem dritten Theile des Radius; aus den bereits in der Auflösung zu §. 174. angeführten Gründen.

Sind aber n^0, p^0, q^0 die drei Winkel des körperlichen Dreiecks, so ist der Flächen-Inhalt des sphärischen Dreiecks (nach §. 160.), $= \left(\frac{n+p+q}{180} - 1\right) r^2 \pi$ und daher der Inhalt des gedachten körperlichen Dreiecks bis zur Kugelfläche

$$= \tfrac{1}{3} r^3 \pi \left(\frac{n+p+q}{180} - 1\right).$$

§. 181. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines dreiseitigen (senkrechten oder schiefen) Prisma zu finden, von welchem oben ein Stück von einer mit der Grundfläche nicht parallelen Ebene DEF abgeschnitten ist (Fig. 63.).

Auflösung. Ist $AD = a$, $BE = b$, $CF = c$ und F der Inhalt des auf den Kanten AD, BE und CF senkrechten Schnittes GHJ, so ist der Inhalt des schief abgeschnittenen Prisma

$$ABCDEF = F \cdot \frac{a+b+c}{3}.$$

Denn legt man die Ebenen DHJ und AHJ, so zerfällt das ganze Prisma in vier Pyramiden, nämlich in die beiden vierseitigen BCJHA und EFJHD

und in die beiden dreiseitigen GJHA und GJHD. Nun ist aber, wenn GK senkrecht auf JH gezogen wird, auch GK senkrecht auf BCEF, also GK die Höhe der beiden erstgenannten vierseitigen Pyramiden; überdies ist noch

$$BCJH = \frac{CJ + BH}{2} \cdot JH \text{ und } EFJH = \frac{JF + HE}{2} \cdot JH,$$

also der Inhalt

$$\text{der Pyramide } BCJHA, = \frac{CJ + BH}{3} \cdot \frac{JH \cdot GK}{2} = F \cdot \left(\frac{CJ + BH}{3}\right),$$

$$\text{der Pyramide } EFJHD, = \frac{JF + HE}{3} \cdot \frac{JH \cdot GK}{2} = F \cdot \left(\frac{JF + HE}{3}\right),$$

also beider Pyramiden zusammen,

$$= F \cdot \frac{b + c}{3}.$$

Ferner ist der Inhalt der beiden noch übrigen Pyramiden, welche GHJ zur Grundfläche und beziehlich A und D zur Spitze haben,

$$= F \cdot \frac{AG + DG}{3} = F \cdot \frac{a}{3};$$

also der Gesammt-Inhalt des schief abgeschnittenen Prisma

$$= F \cdot \frac{a + b + c}{3}.$$

§. 182. Zusatz.

Ein mehrseitiges schief abgeschnittenes Prisma kann in lauter dreiseitige zerlegt und dann der Inhalt dieser letztern, also zuletzt auch der Gesammt-Inhalt gefunden werden.

§. 183. Zusatz.

Der Inhalt einer schief abgeschnittenen Pyramide wird gefunden, wenn man die Ergänzungs-Pyramide bestimmt und dann den Inhalt dieser, von dem Inhalte der ganzen Pyramide subtrahirt.

§. 184. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt des Tetraëders zu finden, dessen Seite $= a$ ist.

Auflösung. Weil das Tetraëder nichts anders ist als

eine Pyramide, so darf man nur eines der regulären Dreiecke als Grundfläche, mit der Höhe der Pyramide multipliciren, z. B. ABC mit DE (Fig. 64.).

Es ist aber der Flächen-Inhalt des Dreiecks ABC $=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; und weil DEB bei E rechtwinklich ist, so ist die Höhe $DE^2=DB^2-BE^2$, während $DB=a$ und BE der Radius des, um das gleichseitige Dreieck beschriebenen Kreises ist. Zwischen diesem Radius BE und der Seite AB des regulären eingeschriebenen Dreiecks findet aber die Gleichung statt:

$$BE=a\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Also hat man $DE=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}a^2}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Und daher ist der Inhalt des Tetraëders

$$=\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}\times\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{2}{3}}=\tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Beispiel. Ist die Seite des Tetraëders 2′ 7″, so ist, in Fußen ausgedrückt, $a=2{,}7$ und der Inhalt des Tetraëders in Kubikfußen $=2{,}319314$ oder $2^{c\prime}\ 319^{c\prime\prime}\ 314^{c\prime\prime\prime}$.

§. 185. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt des Octaëders zu finden, welches die Kante a hat.

Auflösung. Das Octaëder zerlegt sich in zwei congruente vierseitige Pyramiden, welche a^2 zur Grundfläche haben. Die Höhe DE (Fig. 65.) einer solchen Pyramide ist $=\sqrt{DB^2-BE^2}$, während $DB=a$ und BE der Radius ist, des um das Quadrat ABC beschriebenen Kreises. Dieses letztern Umstandes wegen hat man

$$2BE^2=a^2 \quad \text{oder} \quad BE=a\sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

also auch $DE=\sqrt{a^2-\frac{1}{2}a^2}=a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Mithin ist der Inhalt einer solchen Pyramide

$$=a^2\times\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\tfrac{1}{3}a^3\sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

und demnach der Inhalt beider Pyramiden, d. h. des Octaëders $= \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$.

Beispiel. Wäre $a = 47$, in Zollen ausgedrückt, so findet sich danach der Inhalt des Octaëders $= 9277{,}256$ in Kubikzollen, d. h. $9^{cl}\ 277^{cll}\ 256^{clll}$.

§. 186. Aufgabe.

Den Inhalt eines Icosaëders zu finden, dessen Seite $= a$ ist.

Auflösung. Man zerlege solches aus dessem Mittelpunkte in seine zwanzig congruenten dreiseitigen Pyramiden, welche alle das reguläre Dreieck, dessen Inhalt $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ ist, zur Grundfläche haben. Es kommt daher nun alles darauf an, die Höhe einer solchen Pyramide zu finden, d. h. den Halbmesser der in das Icosaëder zu beschreibenden Kugel.

Nun ist aber (§. 138.) diese Höhe gefunden worden:

$$= \tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = a\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} = \tfrac{1}{12}a\cdot\sqrt{3}\cdot(3+\sqrt{5});$$

also ist der Inhalt der Pyramide ABDC selbst

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}\times\tfrac{1}{12}a\sqrt{3}\cdot(3+\sqrt{5}) = \tfrac{1}{48}a^3\cdot(3+\sqrt{5});$$

und der Inhalt aller zwanzig Pyramiden oder des ganzen Icosaëders

$$= \tfrac{5}{12}a^3\cdot(3+\sqrt{5}).$$

§. 187. Aufgabe.

Den Inhalt eines Dodekaëders zu finden, dessen Seite $= a$ ist.

Auflösung. Auch hier kommt alles darauf an, die Höhe einer der zwölf fünfseitigen Pyramiden zu wissen, in welche das Dodekaëder aus dem Mittelpunkte zerlegt werden kann, und deren Grundfläche (nach §. 163.) $= \frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ ist.

Nun ist aber (§. 140.) die Höhe dieser Pyramide gefunden

$$= \tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}};$$

also ist der Inhalt der Pyramide

$$= \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$$

$$= \tfrac{1}{24}a^3\sqrt{\frac{235+105\sqrt{5}}{2}}.$$

Und der Inhalt aller zwölf Pyramiden, d. h. des Dodekaëders

$$= \tfrac{1}{4}a^3\cdot\sqrt{470+210\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4}a^3(15+7\sqrt{5}).$$

Anmerkung. Daß der Inhalt des regulären Hexaëders, dessen Seite $=a$ ist, allemal $=a^3$ seyn werde, ist bereits zur Genüge bekannt.

Körperliche Geometrie.

Sechstes Kapitel.

Stereometrisch-algebraische Aufgaben.

§. 188. Aufgabe.

Es wird der Centri-Winkel ACB eines Sectors gesucht (Fig. 66.), welcher den gegebenen Radius r hat, und zum Kegelmantel FEG zusammengerollt, einen Kegel von dem bestimmten Inhalte a giebt.

Auflösung. Ist x^0 der Centri-Winkel, r in Fußen, a dagegen in Kubikfußen ausgedrückt, so ist nach der Voraussetzung $AC = FE = r$; — Die Länge des Bogens AB oder der Kreis-Umfang $FHG = \frac{x}{360} \cdot 2r\pi = \frac{r\pi x}{180}$, mithin der Radius $FH = \frac{rx}{360}$ und die Höhe $EH = \sqrt{EF^2 - FH^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2x^2}{360^2}}$ $= r\sqrt{1 - \frac{x^2}{360^2}}$; und der Inhalt der Kreisfläche ist nun $FHG = \frac{r^2x^2}{360^2}\pi$, folglich der Inhalt des Kegels EFHG

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3 x^2}{360^2} \pi \sqrt{1 - \frac{x^2}{360^2}}$, so daß letzteres die Zahl der Kubikfuße ist, wenn r selbst in Längenfußen ausgedrückt war. Solche Zahl ist also, der Voraussetzung zu Folge, $= a$, wenn nämlich a selbst sich auf den Kubikfuß bezieht; und man hat also die Gleichung:

$$1) \quad \frac{1}{3} \frac{r^3 x^2}{360^2} \pi \sqrt{1 - \frac{x^2}{360^2}} = a,$$

welche nur nach x aufgelöst werden darf, um den gesuchten Centri-Winkel x^0 zu haben.

Um aber diese Gleichung nach x aufzulösen, muß man vor allen Dingen auf beiden Seiten quadriren, um die Wurzel wegzuschaffen, dann die Gleichung ordnen, und man wird eine Gleichung vom sechsten Grade finden, welche jedoch auf den dritten Grad zurückgebracht werden kann.

Weil jedoch in der Gleichung (1.) bloß $\frac{x^2}{360^2}$ vorkommt und außerdem x selbst nicht mehr, so kann man sogleich

$$2) \quad \frac{x^2}{360^2} = z$$

setzen, und hat dann (aus 1.) die Gleichung

$$3) \quad \frac{1}{3} \pi r^3 z \sqrt{1 - z} = a,$$

welche nach z nun aufgelöst wird. Sie giebt

$$4) \quad \pi^2 r^6 z^2 (1 - z) = 9a^2$$

oder

$$5) \quad z^3 - z^2 + \frac{9a^2}{\pi^2 r^6} = 0.$$

Hat man aus dieser Gleichung (5.) z gefunden, so ergiebt sich dann aus (2.):

$$6) \quad x = 360 \cdot \sqrt{z}.$$

Note. Sollte ein Klempner einen Trichter verfertigen FEG, dessen Seite 9 Zoll ist, und welcher 112 Kubikzoll Wasser fassen soll, so muß er ein

Blech von der Form des Sectors **ACB** dazu nehmen, dessen Radius **AC**=9 Zoll, wozu aber der Centri-Winkel **ACB** noch gesucht werden muß. — Man hat hier, wenn man lieber r und a in Längenzolle und in Kubikzolle ausgedrückt läßt, $r=9$, $a=112$ und die Gleichung (5.) wird nun

$$z^3-z^2+\frac{9\cdot(112)^2}{9^6\cdot(3{,}14)^2}=0$$

oder $$z^3-z^2+0{,}021503=0,$$

woraus $$z=0{,}16$$

und $$x=360\sqrt{z}=360\times 0{,}4=144;$$

d. h. der Centri-Winkel **ACB** hat 144 Grade.

§. 189. Zusatz.

Wäre die Aufgabe so gestellt, daß der Centri-Winkel x gegeben, dagegen der Radius r gefunden werden soll, damit der Kegel den Inhalt a habe, so würde man dieselbe Gleichung

$$1)\ \tfrac{1}{3}\cdot\frac{r^3x^2}{360^2}\cdot\pi\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}=a$$

finden, aber in ihr r als den Unbekannten entwickeln müssen, und x als die gegebene Zahl der Grade annehmen. Man findet dann

$$r=360\cdot\sqrt[3]{\frac{3a}{\pi\cdot x^2\sqrt{360^2-x^2}}}$$

oder

$$2)\ r=360\cdot\sqrt[3]{\frac{3a}{\pi x^2\sqrt{(360+x)\,(360-x)}}}$$

Note. Soll also die Länge des Radius **CA** gesucht werden, damit der den Centri-Winkel 144° habende Sector **ACB** zusammengerollt, einen Trichter von 112 Kubikzoll Inhalt gebe, so hat man $x=144$, $a=112$, und daher, wenn man Logarithmen zu Hülfe nimmt,

	log a = *log* 112	= 2,0492180
add.	*log* 3 =	= 0,4771213
P....	Summe	= 2,5263393
Ferner	*log* (360 + x) = *log* 504	= 2,7024305
add.	*log* (360 − x) = *log* 216	= 2,3344538
	Summe	= 5,0368843

A…	die Hälfte davon		= 2,5184421
	log x =	*log* 144	= 2,1583625
B…	2 *log* x		= 4,3167250
C…	*log* π =	*log* 3,14159	= 0,4971495
D…	A + B + C		= 7,3323166
E…	P − D		= 25,1940227 − 30,
F…	$\frac{1}{3}$ E		= 8,3980076 − 10,
G…	*log* 360		= 2,5563025
F + G…	*log* r		= 0,9543101
also	r		= 9,0014

d. h. der Radius r hat 9 Zolle.

§. 190. Zusätze.

Wollte man die Aufgabe so stellen, daß sowohl der Radius AC = r, als auch der Centri-Winkel x° gesucht würde, damit der Kegel EFHG den gegebenen Inhalt a, und seine Grundfläche auch einen gegebenen Durchmesser d bekomme, so hat man dieselbe Gleichung

$$1)\ \tfrac{1}{3}\cdot\frac{r^3x^2}{360^2}\pi\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}=a;$$

aber außerdem noch, weil (§. 188.) der Radius $FH=\frac{rx}{360}$ gefunden wurde, diese andere Gleichung

$$2)\ d=\frac{rx}{180},$$

aus welchen beiden Gleichungen nun die beiden Unbekannten r und x gefunden werden müssen.

Um diese Gleichungen aufzulösen, eliminire man x, finde zu dem Ende (aus 2.):

$$3)\ x=\frac{180\cdot d}{r}=\frac{360\cdot d}{2r}\quad\text{oder}\quad\frac{x}{360}=\frac{d}{2r},$$

und substituire diesen Werth statt x (in 1.), und man erhält

$$4)\ \tfrac{1}{3}\cdot\frac{r\cdot d^2}{4}\pi\cdot\sqrt{1-\frac{d^2}{4r^2}}=a,$$

welche Gleichung nur noch den einen Unbekannten r hat. Ordnet man sie nach r, so ergiebt sich

$$5)\ r = \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + \frac{144a^2}{d^4\pi^2}}$$

und daraus (und aus 3.):

$$6)\ x = 180 \cdot \frac{d^3\pi}{\sqrt{144a^2 + \tfrac{1}{4}d^6\pi^2}},$$

während r der gesuchte Radius ist und x der gesuchte Centri-Winkel.

Note. Sollte also ein Trichter verfertigt werden, von dem gegebenen Inhalte $\frac{1}{4}$ Kubikfuß und so, daß die oberste Weite 5 Zoll würde, so müßte man $a = \frac{1}{4} \cdot 1000 = 250$ setzen, so wie $d = 5$; und, während allemal $\pi = 3{,}14159\ldots$ ist, r (aus 5.) berechnen, welches der Radius AC ist (Fig. 66.), in Zollen ausgedrückt; dann (nach 6.) x berechnen, welches der Centri-Winkel ACB ist, in Graden ausgedrückt.

Anmerkung. Wollte man in allen drei Aufgaben (§§. 188.—190.) durch x nicht die Zahl der Grade bezeichnen, sondern die Länge des Bogens für den Radius 1, zwischen ACB beschrieben, so würde dann Bog. $AB = rx =$ Umfang FHG, und der Durchmesser $FG = \frac{rx}{\pi}$, $FH = \frac{rx}{2\pi}$, und

$$EH = \sqrt{r^2 - \frac{r^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2};$$

der Inhalt der Grundfläche $FHG = \frac{r^2x^2}{4\pi}$, also der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3x^2}{8\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$; und in den beiden erstern Aufgaben (§§. 188. 189.) hat man nun die Gleichung

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{r^3x^2}{8\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = a$$

zur Bestimmung von r oder von x, während in der dritten Aufgabe (§. 190.) die zweite Gleichung

$$\frac{rx}{\pi} = d$$

noch hinzutritt und in Verbindung mit der vorigen, sowohl r als auch x, aus a und d finden läßt.

Was man aber nun für x findet, ist nicht die Zahl der Grade, sondern die Länge des, zwischen ACB mit dem Radius 1 beschriebenen Bogens; so daß, wenn d in Zollen und a in Kubikzollen ausgedrückt worden ist, die jetzt für x gefundene Zahl die Länge des Bogens ist, zwischen ACB mit 1 Zoll als Radius beschrieben, und ebenfalls in Zollen ausgedrückt. Dagegen drückt x die Länge des zwischen ACB mit 1 Fuß als Radius beschriebenen Bogens aus, ebenfalls als Zahl, die sich auf den Fuß bezieht, so oft d und a in Fußen ausgedrückt waren, so daß d die Zahl der Längenfuße vorstellte, welche der Durchmesser FG hat, a dagegen die Zahl der Kubikfuße, welche der Kegel enthält.

Und hat man x als die Länge des Bogens für den Radius 1, und bedeutet x′ die Zahl der Grade des zugehörigen Centri-Winkels ACB selbst, so hat man wiederum

$$x : 2\pi = x' : 360,$$

woraus $x' = \frac{360 \cdot x}{2\pi} = \frac{180 \cdot x}{\pi}$, woraus also wiederum auch die Zahl der Grade gefunden wird, welche der Centri-Winkel ACB hat.

§. 191. Aufgabe.

Es wird ein concentrischer Ring ABDM gesucht, welcher zusammengerollt einen abgekürzten Kegel giebt FGJK, von gegebenen Eigenschaften (Fig. 66.).

Betrachtung. Diese Aufgabe zerfällt in so viele einzelne als verschiedene Bedingungen gemacht werden, denen der gesuchte Ring genügen soll, während wiederum auch in dem letztern verschiedene Elemente gegeben, verschiedene gesucht seyn können.

Erster Fall. Der abgekürzte Kegel soll die gegebene Höhe LH = h haben; die Radien CA = R und CD = r sollen ebenfalls gegeben seyn, und der Centri-Winkel ACB = x° gesucht.

Auflösung. Es ist $AB=\frac{\pi Rx}{180}=$ Umfang FHG, $DM=\frac{\pi rx}{180}=$ Umfg JLK; daher Radius $FH=\frac{Rx}{360}$ und Radius $JL=\frac{rx}{360}$, so wie $FN=\frac{Rx}{360}-\frac{rx}{360}=(R-r)\frac{x}{360}$ und $JF=AD=R-r$ und $LH=JN=\sqrt{JF^2-FN^2}$ $=\sqrt{(R-r)^2-(R-r)^2\cdot\frac{x^2}{360^2}}=(R-r)\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}$; und weil diese Höhe $LH=h$ gegeben ist, so hat man die Gleichung

$$1)\quad (R-r)\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}=h,$$

woraus

$$2)\quad x=\frac{360}{R-r}\sqrt{(R-r)^2-h^2};$$

woraus sich x in jedem gegebenen Zahlen-Beispiel noch überdies bequem mittelst Logarithmen berechnen läßt, wenn man die Formel so umändert

$$x=\frac{360}{R-r}\sqrt{[(R-r)+h][(R-r)-h]},$$

weil sich dann sogleich findet

$$log\ x=\tfrac{1}{2}[log\ (R-r+h)+log\ (R-r-h)]+log\ 360-log\ (R-r).$$

Anmerkung. Würde, unter der Voraussetzung, daß die Höhe $LH=h$ gegeben ist, von den drei Ausdrücken R, r und x, irgend einer gesucht, während die beiden andern als gegeben angesehen werden, so würde man natürlich dieselbe Gleichung

$$1)\quad (R-r)\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}=h$$

erhalten, aber daraus R oder r finden. Es findet sich aber

$$2)\ R-r=\frac{h}{\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}}.$$

§. 192. Aufgabe.

Zweiter Fall der vorhergehenden Aufgabe (§. 191.), wo der abgekürzte Kegel die gegebene Höhe h, aber auch die gegebene obere Weite JK = d bekommen soll, während x und R gesucht, r aber gegeben ist.

Auflösung. Man hat hier außer der Gleichung

$$1)\ (R-r)\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}=h,$$

auch noch diese andere

$$2)\ \frac{rx}{180}=d$$

und beide in Verbindung dienen zur Bestimmung von x und von R; und sie geben

$$3)\ x=\frac{180\cdot d}{r}=\frac{360\cdot d}{2r}$$

und dann

$$4)\ R=r+\frac{h}{\sqrt{1-\frac{d^2}{4r^2}}}=\frac{r}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}d^2}}[\sqrt{r^2-\tfrac{1}{4}d^2}+h].$$

Anmerkung 1. Sollte in derselben Aufgabe statt r lieber R gegeben seyn, und dann x und r gesucht, so hätte man noch immer die beiden Gleichungen (1.) und (2.), aus denen aber jetzt x und r gefunden werden müßten. Man müßte nun aus beiden x oder r eliminiren, um zuerst r oder x zu finden. Eliminirt man x, so ergiebt sich

$$5)\ (R-r)\sqrt{1-\frac{d^2}{4r^2}}=h,$$

woraus r noch gefunden werden muß. — Und eliminirt man r, so erhält man

$$6)\quad \left(R-\frac{180\cdot d}{x}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}=h,$$

welche x liefert.

Beide Gleichungen werden aber vom 4ten Grade, sowohl die Gleichung 5. nach r geordnet, als auch die Gleichung 6. nach x geordnet.

Für gegebene Ziffern-Werthe müssen solche dann näherungsweise aufgelöst werden.

Anmerkung 2. Wäre dagegen der Centri-Winkel x gegeben, und würden bloß die beiden Radien R und r gesucht, so würde man noch immer die beiden Gleichungen (1.) und (2.) haben, dagegen solche nach R und r auflösen müssen. — Man erhielte dann

$$7)\quad r=\frac{180\cdot d}{x}$$

und

$$8)\quad R=r+\frac{h}{\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}}=r+\frac{360\cdot h}{\sqrt{(360+x)(360-x)}}.$$

§. 193. Aufgabe.

Dritter Fall der Aufgabe (§. 191.), wo wir annehmen wollen, daß die obere Weite JK=d, die untere Weite FG=D und die Höhe LH=h gegeben ist, und x und R und r alle drei gefunden werden sollen.

Auflösung. Man hat hier die drei Gleichungen

$$1)\quad (R-r)\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}=h,$$

$$2)\quad \frac{rx}{180}=d,\qquad 3)\quad \frac{Rx}{180}=D,$$

woraus R, r und x gefunden werden müssen. — Man erhält

aber (aus 2. und aus 3.)

$$4)\ r=\frac{180\cdot d}{x} \quad \text{und} \quad 5)\ R=\frac{180\cdot D}{x},$$

und diese Werthe statt r und R (in 1.) gesetzt, geben:

$$6)\ \frac{180}{x}\cdot(D-d)\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}=h,$$

oder $$(D-d)^2\left(1-\frac{x^2}{360^2}\right)=\frac{h^2x^2}{180^2},$$

oder $$(D-d)^2-\frac{(D-d)^2x^2}{360^2}=\frac{4h^2x^2}{360^2},$$

oder $$7)\ x=\frac{360(D-d)}{\sqrt{(D-d)^2+4h^2}};$$

woraus dann (nach 4. und 5.) sogleich

$$8)\ r=\frac{d\cdot\sqrt{(D-d)^2+4h^2}}{2(D-d)}$$

und $$9)\ R=\frac{D\cdot\sqrt{(D-d)^2+4h^2}}{2(D-d)}$$ folgt.

§. 194. Aufgabe.

Vierter Fall der Aufgabe (§. 191.), wo R und r wieder gegeben, der Centri-Winkel x aber gesucht seyn mag, unter der Voraussetzung, daß der Inhalt des abgekürzten Kegels gegeben und $=a$ ist.

Auflösung. Man bekommt hier eine ganz neue Gleichung, weil der Inhalt des Körpers, in R, r und x ausgedrückt, gefunden und $=a$ gesetzt werden muß. Es ist aber

$$FN:JN=JL:EL,$$

oder $$\frac{x}{360}(R-r):h=\frac{rx}{360}:EL,$$

oder $$EL=\frac{rh}{R-r} \quad \text{und} \quad EH=\frac{Rh}{R-r};$$

folglich ist (weil Grundfläche $FHG=\frac{x^2}{360^2}R^2\pi$ und Grundfläche $JLK=\frac{x^2}{360^2}r^2\pi$) der Inhalt des ganzen Kegels $EFG=\frac{1}{3}\frac{R^3h}{R-r}\cdot\frac{x^2}{360^2}\pi$, und der Inhalt des Ergänzungs-Kegels $EJK=\frac{1}{3}\frac{r^3h}{R-r}\cdot\frac{x^2}{360^2}\pi$, also ist der Inhalt

$$JKFG=\frac{1}{3}\frac{x^2}{360^2}h\pi\cdot(R^2+Rr+r^2),$$

wo jedoch h selber nicht gegeben ist, sondern noch eliminirt werden muß. — Man hat aber

$$JF^2=JN^2+FN^2,$$

also

$$(R-r)^2=h^2+\frac{x^2}{360^2}(R-r)^2,$$

welche

$$h=(R-r)\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}$$

liefert.

Substituirt man diesen Werth für h in den Inhalt JKFG, so erhält man:

$$1)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{360^2}\cdot(R^3-r^3)\pi\sqrt{1-\frac{x^2}{360^2}}=a,$$

aus welcher nun x gefunden werden kann. — Schafft man die Wurzel weg, auf beiden Seiten quadrirend, so ergiebt sich die geordnete Gleichung

$$2)\ \left(\frac{x}{360}\right)^6-\left(\frac{x}{360}\right)^4+\frac{9a^2}{(R^3-r^3)^2\pi^2}=0,$$

oder, wenn man $\frac{x^2}{360^2}=z$ setzt,

$$3)\ z^3-z^2+\frac{9a^2}{(R^3-r^3)^2\pi^2}=0,$$

welche in gegebenen Zifferfällen nach z näherungsweise gelöst werden muß, um dann

$$x = 360 \cdot \sqrt{z}$$

zu erhalten.

Anmerkung. Würde der Centri-Winkel x gesucht und auch noch der Radius CD=r, während R=CA gegeben ist, und soll der Körper JKFG die gegebene Höhe h und den gegebenen Inhalt a haben, so hat man die beiden Gleichungen

$$1)\ \tfrac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{360^2} h\pi \cdot (R^2 + Rr + r^2) = a$$

und

$$2)\ (R-r)^2 \left(1 - \frac{x^2}{360^2}\right) = h^2,$$

aus denen nun x und r zu finden ist.

Eliminirt man aber x, so erhält man nach r eine Gleichung des 4ten Grades; und eliminirt man r, so erhält man nach x ebenfalls eine höhere Gleichung. Man muß sich daher begnügen, beide Gleichungen jede nach ihrem Unbekannten zu ordnen und in gegebenen Zifferfällen näherungs- und versuchsweise zu lösen.

Note. Wir wollen nicht weiter fortfahren, diese Aufgabe (des §. 191.) in ihren speciellen Fällen zu verfolgen, weil die Zahl derselben für den gegenwärtigen Zweck zu groß ausfallen würde; denn man könnte verlangen, daß der Körper JKFG einen gegebenen Inhalt a und eine gegebene obere Weite JK=d, oder den gegebenen Inhalt a und eine gegebene untere Weite D, oder einen gegebenen Inhalt a und die gegebenen Weiten d und D zugleich haben solle.

Mit einem Worte; von den Größen a, h, d, D, kann irgend eine, oder können irgend zweie, oder irgend dreie gegeben seyn, und von den Größen R, r und x irgend eine oder irgend zweie oder alle dreie gesucht. — Und außerdem können statt der Weiten d und D die Flächen-Inhalte der Grundflächen JKL und FGH, statt der Höhe h die Seite FJ, ꝛc. ꝛc. in Rechnung gebracht werden sollen. — Allemal wird es, wie in jeder algebraischen Aufgabe, darauf ankommen, sich so viele Gleichungen zu verschaffen, als man Unbekannte in die Rechnung einführt, um die Unbekannten selbst nach und nach eliminiren, und den Werth des zuletzt bleibenden (und dann aller der übrigen) finden zu können.

§. 195. Aufgabe.

Wie hoch muß das Kugel-Segment seyn, damit der Inhalt desselben 0,84 des ganzen Kugel-Inhalts werde.

Auflösung. Man nehme der Bequemlichkeit wegen den Radius der Kugel zur Einheit (zum Gemäß) und h sey die gesuchte Höhe ZK des Kugelsegments ZAB (Fig. 60.) (eine Zahl, welche sich auf den Radius der Kugel als Einheit bezieht), so ist der Inhalt der ganzen Kugel $=\frac{4}{3}\pi$. — Und weil das Segment größer wie die Halbkugel seyn soll, also h größer wie der Radius, so wird der Inhalt desselben gefunden, wenn man den Inhalt des Sectors CAZB zu dem Inhalte des Kegels ACB addirt. Nun ist $KZ=h$, $CK=h-1$, $AK=\sqrt{2h-h^2}$ und der Inhalt der Kreisfläche $AKB=(2h^2-h^2)\pi$; daher der Inhalt des Kegels

$$ACB=\tfrac{1}{3}(h-1)(2h-h^2)\pi=\tfrac{1}{3}h(h-1)(2-h)\pi$$

Der Inhalt der Calotte $AZB=2h\pi$, also der Inhalt des Sectors $ACBZ=\frac{2}{3}h\pi$; und demnach der Inhalt des Segments $AZB, =\frac{1}{3}\pi h\cdot[2+(h-1)(2-h)]=\frac{1}{3}\pi\cdot h^2\cdot(3-h)$; und weil solcher 0,84 des ganzen Inhalts der Kugel seyn soll, so hat man die Gleichung

$$\tfrac{1}{3}\pi h^2(3-h)=\tfrac{4}{3}\pi\times 0{,}84,$$

oder $$h^2(3-h)=4\times 0{,}84=3{,}36,$$

oder $$1)\quad h^3-3h^2+3{,}36=0,$$

welche zur Bestimmung von h dienen muß.

Versucht man nun und setzt $h=1{,}2$, dann $h=1{,}3$, hernach $h=1{,}4$, endlich $h=1{,}5$ *), so wird der Ausdruck links (in 1.) nämlich $h^3-3h^2+3{,}36$ immer positiv, bis er endlich für $h=1{,}5$ zum Negativen übergeht; — zwischen $h=1{,}4$ und $h=1{,}5$ muß also ein Werth von h liegen, welcher denselben Ausdruck zu Null macht, d. h. welcher der Gleichung (1.) genügt. — Setzt man daher $h=1{,}5+w$ (in 1.), so erhält man, wenn die höhern Potenzen von w, in so fern w sehr klein ist, weggelassen werden, (aus 1.) die Gleichung in w, nämlich:

---

*) Man weiß nämlich, daß, in so fern $CZ=1$ und $UZ=2$ ist, auch $ZK>1$ und <2 seyn müsse.

$$-0{,}015-2{,}25\times w=0,$$

woraus $w=-0{,}006$ sich ergiebt so daß man hat $h=1{,}494$ näherungsweise, während man, um h noch näher zu haben, nur auf's Neue $h=1{,}494+w$ setzen dürfte, um w in fünf Decimalstellen zu finden und h bis auf die 4te oder 5te Stelle genau zu haben.

Es muß also die Höhe ZK des Segments 1,494 des Radius der Kugel seyn, wenn der Inhalt des Segments 0,84 des ganzen Kugel-Inhalts seyn soll.

Note. Würde gefragt, wie tief taucht sich eine hölzelne Kugel in Wasser ein, wenn das specifische Gewicht des Holzes 0,84 ist (in Bezug auf das desselben Wassers, unter denselben übrigen Umständen), so würde dies genau die vorstehende Aufgabe seyn. Sie taucht nämlich so tief ein, daß das im Wasser befindliche Kugelsegment AZB genau 0,84 des ganzen Kugel-Inhalts hat, in so fern jeder leichtere Körper sich so weit in das Wasser eintaucht, daß das von ihm vertriebene Wasser genau so viel wiegt, als der ganze Körper; und weil hier ein allenthalben gleich dichter Körper angenommen wurde, so kann man statt der Gewichte, die Raum-Inhalte (Volumina) nehmen, weil, unter dieser Voraussetzung, das Verhältniß der Gewichte dem Verhältniß der Raum-Inhalte gleich ist.

Noch mehr Uebungs-Aufgaben.

1) Eine Calotte ist 4 Fuß hoch und enthält 200 Quadratfuß; wie groß ist der Halbmesser der zugehörigen Kugel? Antw. 7′ 9″ 5‴.

2) Es ist gegeben die Oberfläche der Kugel $=f$; man soll den Inhalt der Kugel finden. Antw. Solcher ist

$$=\frac{f}{6}\sqrt{\frac{f}{\pi}}=\frac{f}{6}\sqrt{\left(f\cdot\frac{1}{\pi}\right)}.$$

3) Der Inhalt einer Kugel ist $=k$ gegeben, man soll den Halbmesser und die Kugelfläche finden? Antw. Der Halbmesser ist $=\sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}}$ und die Kugelfläche $=\sqrt[3]{\quad}$ $36\pi k^2$.

4) Die Halbmesser der parallelen Ebenen, welche eine Zone abschneiden, sind 12 Fuß und 8 Fuß, und die Höhe der Zone ist 4 Fuß; man soll den Halbmesser der Kugel, den Flächen-Inhalt der Zone, und den Inhalt der körperlichen Zone finden. Antw. Der Halbmesser der Kugel findet sich $=14'\ 4''\ 2''',2$; die Zone $=3^{\square'}\ 62^{\square''}\ 46^{\square'''}$ und die körperliche Zone $5361^{c'}\ 643^{c''}$.

5) Die Höhe des Kugel-Abschnitts zu finden, welcher sich zu dem zugehörigen Kugel-Ausschnitt verhält, wie 3 zu 5, d. h. welcher $\frac{3}{5}$ des Kugel-Ausschnitts ist? Antw. Unter der Voraussetzung, daß r den Halbmesser der Kugel vorstellt, findet sich die gesuchte Höhe

$$= r\left(\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{2}{2}\tfrac{1}{0}}\right).$$

Und sollte sich das Segment zum Sector verhalten wie n:m, so erhielte man die Höhe $= r\left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2n}{m}}\right)$.

6) Die parallelen Grundflächen eines abgekürzten Kegels sollen sich wie 3:2 verhalten, die Höhe soll 24 Fuß und der Inhalt 200 Kubikfuß seyn; wie groß sind die Halbmesser der Grundflächen? Antw. Der eine $=1{,}46$, der andere $=1{,}788$.

7) Die eine der parallelen Grundflächen einer abgekürzten Pyramide sey $= 16^{\square'}$, die Höhe der abgekürzten Pyramide $= 12'$, ihr Inhalt $= 160^{c'}$. Wie groß ist der Inhalt der andern parallelen Ebene? Antw. 10,836 Quadratfuß.

8) Von einem Kugelsegment ist die Weite b und die Höhe h gegeben; man soll den körperlichen Inhalt desselben finden. Antw. Aus der Höhe h und der halben Weite $\frac{1}{2}b$ berechnet sich der Durchmesser der Kugel $= \frac{\frac{1}{4}b^2 + h^2}{h}$; der Inhalt des kleinern Kreises (der Grundfläche des Segments) $= \frac{1}{4}b^2\pi$; der Inhalt der Calotte $= (\frac{1}{4}b^2 + h^2)\pi$; der Inhalt des Kugelsectors $= \frac{1}{6} \cdot \frac{(\frac{1}{4}b^2 + h^2)^2}{h}\pi$; der Inhalt des Kegels, welcher die Grundfläche des Segments zur Grundfläche, den Mittelpunkt der Kugel aber zur Spitze hat, $= \frac{1}{2}\frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{4}b^2 - h^2}{h} \cdot b^2\pi$; also der Inhalt des Kugel-Segments $= \frac{1}{6}\frac{\pi}{h}[(\frac{1}{4}b^2 + h^2)^2 - (\frac{1}{4}b^2 - h^2)\frac{1}{4}b^2] = \frac{1}{6}h\pi(\frac{3}{4}b^2 + h^2)$.

9) Durch einen senkrechten Cylinder wird eine Ebene gelegt parallel mit der Axe, so bildet solche mit der cylindrischen Oberfläche eine Figur, welche einen Kreis-Abschnitt zur Grundfläche und die Höhe des Cylinders zur Höhe hat, und welche als ein Prisma angesehen und berechnet werden kann. Ist nun b die Weite, h die Höhe des Kreis-Segments, so ist $\frac{\frac{1}{4}b^2 + h^2}{2h}$ der Halbmesser des Kreises, und wird der zum Bogen des Segments gehörige Centri-Winkel durch x^0 vorgestellt, so hat man $\sin \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}b : \frac{\frac{1}{4}b^2 + h^2}{2h} = \frac{bh}{\frac{1}{4}b^2 + h^2}$. Daraus findet man, so oft b und h in Ziffern gegeben sind, aus den trigonometrischen Tabellen x selbst, und

aus dem Centri-Winkel x die Länge des Bogens $= \frac{\pi x \cdot (\frac{1}{4}b^2 + h^2)}{360 \cdot h}$, daraus den Inhalt des Kreissectors $= \frac{\pi x \cdot (\frac{1}{4}b^2 + h^2)^2}{360 \cdot 4h^2}$; dann der Inhalt des Dreiecks $= b \cdot \frac{\frac{1}{4}b^2 - h^2}{4h}$; folglich der Inhalt des Kreis-Abschnitts $= \frac{\pi x (\frac{1}{4}b^2 + h^2)^2}{360 \cdot 4h^2} - \frac{b \cdot (\frac{1}{4}b^2 - h^2)}{4h}$. Und wird der Inhalt des Segments noch mit der Höhe des Cylinders multiplicirt, so bekommt man sogleich den körperlichen Inhalt des abgeschnittenen Stücks. — Als Anwendung mag folgende Aufgabe stehen.

10) Ein Tonnen-Gewölbe ist 30′ lang, hat den Durchschnitt ABCDEF (Fig. 67.), die Weite im Lichten 20′, also BC = 20′ die Höhe im Lichten 4′, also GF = 4′, und die Steindicke EF = 2′; man soll den körperlichen Inhalt der Steinlage, deren Durchschnitt ABEFCD ist, bestimmen. — Antw. Man berechne den Inhalt der Fläche (des Ringes) ABEFCD und multiplicire solchen mit der Länge = 30′. — Es findet sich aber W. AHD = 100° 58′, also Sector HAED $= \frac{50 \cdot 60 + 29}{180 \cdot 60} (\frac{3}{2}^3)^2 \pi$ und $\triangle$ ADH = 12,72792 × $\frac{21}{2}$. — Ferner wird W. BHC = 47° 12′; Sector HBFC $= \frac{43 \cdot 60 + 36}{180 \cdot 60} (\frac{29}{2})^2 \pi$ und $\triangle$ BCH = 105 = 10 · $\frac{21}{2}$. — Folglich der Inhalt des Ringstücks AEDCFB = 51,244 Quadratfuß und der Kubik-Inhalt der Gewölbsteine = 30 · 51,244 = 1537$\frac{1}{3}$ Kubikfuße.

11) In einem sphärischen Dreiecke sind die drei Winkel gegeben, nämlich 81° 12′ und 120° 20′ und 79° 51′ und der Halbmesser der Kugel = 860 Meilen, wie groß ist der Flächen-Inhalt. — Antw. 1541045,352 Quadrat-Meilen.

12) Die Höhe h der Calotte zu bestimmen, welche n mal so groß als ihre Grundfläche ist? — Antw. $h = \frac{n-1}{n} \cdot 2r$, wo r der Halbmesser der Kugel ist.

13) Wie verhält sich der Inhalt K einer Kugel, deren Halbmesser = r ist, zum Inhalte J eines Kugel-Abschnitts derselben, dessen Calotte n mal so groß, als die Grundfläche ist. — Antw. $J = \frac{(n-1)^2(n+2)}{n^3} K$.

14) Die beiden Grundflächen eines abgekürzten senkrechten Kegels verhalten sich zu einander, wie a zu b; h ist die Höhe, k der Inhalt; welches sind die Halbmesser r und ϱ der Grundflächen? Antw.

$$\varrho = \sqrt{\frac{3bk}{(a+b+\sqrt{ab})\pi h}} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{\frac{3ak}{(a+b+\sqrt{ab})\pi h}}.$$

15) Ist also die Höhe 24′, der Inhalt 200 Kubikfuß, und $a:b=3:2$, so findet sich $\varrho=1{,}46$ und $r=1{,}788$.

16) Die gesammt-Oberfläche eines senkrechten Kegels ist $=O$, und ein von der Grundfläche um die Entfernung a abstehender paralleler Durchschnitt ist $=f$; wie groß ist der Halbmesser r der Grundfläche und wie groß die Höhe des Kegels? — Antw. Es ist

$$r=\sqrt{\frac{O}{\pi\left(1+\sqrt{\frac{a^2\pi+f}{f}}\right)}}$$

und

$$h=\sqrt{\frac{O}{f\left(1+\sqrt{\frac{a^2\pi+f}{f}}\right)}}.$$

17) Eine Pyramide anzugeben, deren Inhalt $=a$ ist, und welche zugleich einer andern, deren Inhalt $=b$, Höhe $=h$ und deren Grundfläche ein reguläres Achteck ist, ähnlich seyn soll. — Antw. Ist r der Halbmesser der Grundfläche, H die Höhe der gesuchten Pyramide, so ist

$$H=h\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \text{und} \quad r=\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{a^2b}}{4h}}.$$

18) Von einer abgekürzten Pyramide ist gegeben der Inhalt der untern Grundfläche, $=B$; der körperliche Inhalt $=P$; die Höhe $=h$; man soll den Inhalt der obern Grundfläche $=b$ bestimmen. — Antw.

$$b=\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{B}\pm\sqrt{\frac{3P}{h}-\tfrac{3}{4}B}\right)^2$$

oder

$$b=\frac{6P-Bh\pm\sqrt{3Bh(4P-Bh)}}{2h}.$$

19) In einem abgekürzten Kegel ist ϱ der Halbmesser der obern Grundfläche, r der der untern, und die Höhe $=h$. Man soll durch eine mit den Grundflächen parallele Ebene ein Stück abschneiden, welches von der untern Grundfläche an gerechnet $\frac{n}{m}$ des abgekürzten Kegels ist? — Antw. Ist x die Höhe dieses Stückes, y der Halbmesser des zu suchenden Durchschnitts so hat man

$$y=\sqrt{r^3-\frac{n}{m}(r^3-\varrho^3)}$$

und

$$x=\frac{h}{r-\varrho}\left(r-\sqrt[3]{r^3-\frac{n}{m}\cdot(r^3-\varrho^3)}\right).$$

20) In einer abgekürzten Pyramide sey der Inhalt der untern Grundfläche $=B$; der der obern $=b$, die Höhe $=h$; man soll von der untern Grundfläche an durch eine mit ihr parallele Ebene ein Stück abschneiden, welches $\frac{n}{m}$ der abgekürzten Pyramide ist. — Antw. Ist y der Inhalt der Durchschnitts-Ebene und x die Höhe des Stücks, so findet man

$$y=\sqrt[3]{\sqrt{B^3}-\frac{n}{m}(\sqrt{B^3}-\sqrt{b^3})}^2$$

und $$x=\frac{h}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\left(\sqrt{B}-\sqrt[3]{\sqrt{B^3}-\frac{n}{m}(\sqrt{B^3}-\sqrt{b^3})}\right).$$

Körperliche Geometrie.

Siebentes Kapitel.

Körperliche oder sphärische Trigonometrie.

§. 196. Erklärung.

Die Aufgabe: „Zwischen den drei Seiten (Linien-Winkeln) „und den drei Winkeln (Flächen-Winkeln) eines körperlichen „Dreiecks, die nöthige Zahl der Gleichungen zu finden, damit, „wenn drei jener sechs Stücke gegeben sind, die übrigen drei „gefunden werden können," in ihrem ganzen Umfange durchgeführt, giebt die körperliche Trigonometrie. — Dieselbe wird auch die sphärische Trigonometrie genannt, weil man sich das körperliche Dreieck, z. B. DABC (Fig. 68.) mit seiner Spitze oder Ecke D in den Mittelpunkt einer Kugel gestellt denken kann, wo dann die drei begrenzenden Ebenen des körperlichen Dreiecks auf der Oberfläche der Kugel ein sogenanntes sphärisches Dreieck ABC bilden, dessen Seiten Bogen größter Kreise sind, die eben so viele ihrer Bogengrade haben, als die ihnen entsprechenden Linien-Winkel im Mittelpunkte, d. h. die Seiten des körperlichen Dreiecks, Winkelgrade enthalten, so daß, wenn es bloß um die Gradzahl zu thun ist, der Bogen (d. h. die Seite des sphärischen Dreiecks) statt des Linien-

Winkels (d. h. statt der Seite des körperlichen Dreiecks) zu nehmen ist.

Anmerkung 1. Als Winkel des sphärischen Dreiecks kann man den Winkel, z. B. JAK (Fig. 61.) annehmen, den die Tangenten an den sich schneidenden Bogen mit einander machen. — Weil aber diese Tangenten auf dem gemeinschaftlichen Radius AD senkrecht stehen, und dieser Radius die Kante des entsprechenden (Flächen=) Winkels des körperlichen Dreiecks ist, so ist dieser sphärische Winkel kein anderer, als der Neigungs=Winkel (correspondirende Linien=Winkel) des gedachten Flächen=Winkels, folglich der eine ebenfalls mit dem andern zugleich gegeben, und durch einerlei Gradzahl ausgedrückt.

Anmerkung 2. Die körperliche oder sphärische Trigonometrie ist also nichts weiter, als eine Anwendung der früher (im II. Bd.) gelehrten analytischen Trigonometrie (d. h. der reinen Zahlenbegriffe) auf körperliche oder sphärische Dreiecke.

Uebrigens betrachten wir hier lauter solche körperliche oder sphärische Dreiecke, in welchen weder Seiten noch Winkel vorkommen, die über 180° haben, weil man, im Falle ein Dreieck eine Seite oder einen Winkel haben sollte, welche oder welcher mehr als 180° hat, dann nur das Neben=Dreieck berechnen darf, um auch dieses berechnet zu haben.

§. 197. Aufgabe.

In einem körperlichen oder sphärischen Dreieck sind α, β, γ die drei Winkel, a, b und c die, diesen Winkeln bezüglich gegenüberliegenden Seiten; man soll drei Gleichungen zwischen diesen sechs Stücken finden, so daß, wenn drei derselben gegeben sind, die übrigen drei gefunden werden können.

Auflösung. Es sey (Fig. 68.) DABC das körperliche Dreieck (oder ABC das sphärische), und man denke sich aus C in der Kante CD, auf die gegenüberstehende Seite ADB die senkrechte Linie CE gefällt, dann EF und EG senkrecht auf

BD und AD und dann die Linien CG und CF geführt, so ist W. CFE = α, und W. CGE = β. (Eigentlich sind nach §. 46. der W. CFE und der W. CGE die Neigungs-Winkel oder correspondirenden Linien-Winkel der Flächen-Winkel α und β, und eben deshalb werden sie in den Rechnungen statt α und β genommen.)

Man hat nun, wenn noch EJ parallel mit AD und GH parallel mit EF gezogen, und DE geführt wird, die rechtwinklichen Dreiecke CEF, CEG, EFD, CFD, EGD, CGD, EJG, CED (wo der an der Spitze des rechten Winkels stehende Buchstabe absichtlich allemal in die Mitte gesetzt ist); und in diesen rechtwinklichen Dreiecken kann mau nun die trigonometrischen Funktionen der Winkel α, β, so wie der Seiten a, b, abnehmen und mit einander in Vergleichung stellen.

Man erhält aber immer eine Gleichung, wenn man eine und dieselbe Größe, also hier eine und dieselbe Länge, z. B. die Senkrechte CE, doppelt ausdrückt. In der That ist CE eine, den beiden bei E rechtwinklichen Dreiecken FEC und GEC gemeinschaftliche Kathete, und eben deshalb ist sie einmal $= CF \cdot \sin\alpha$ ein andermal aber $= CG \cdot \sin\beta$. Mat hat daher die Gleichung

$$1)\quad CF \cdot \sin\alpha = CG \cdot \sin\beta,$$

und darf nur noch CF und CG in a, b, ꝛc. ausdrücken. Weil aber der Punkt C willkürlich in DC gewählt werden kann, so kann man ihn auch so wählen, daß DC = 1 wird; dann ist

$$2)\ CF = \sin b \quad \text{und} \quad 3)\ CG = \sin a$$

und die vorstehende Gleichung 1. wird nun

$$4)\quad \sin b \cdot \sin\alpha = \sin a \cdot \sin\beta$$

oder

$$5)\quad \sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Will man nun recht strenge seyn, so muß man alle die möglichen Lagen des Punktes E, wie solche nach (§§. 67.—70.) statt finden können, annehmen, und für jede entstehende Figur auf's Neue nachweisen, daß noch immer die Gleichung (4.) oder

(5.) statt finden müsse; was keine andere Schwierigkeit als die Mühe des Aufzählens hat.

Dann hat man aber den Satz allgemein: „In jedem „beliebigen körperlichen (oder auch sphärischen) „Dreiecke, verhalten sich die Sinus je zweier Winkel, „wie die Sinus der, ihnen gegenüber liegenden „Seiten."

§. 198. Zusatz.

Gilt aber der Satz so allgemein, so gilt er auch noch, wenn die Winkel α und γ und die Winkel β und γ auf dieselbe Weise in Betrachtung gezogen werden; und man hat also die drei Gleichungen

$$\text{I.} \begin{cases} 1)\ \sin a \cdot \sin\beta = \sin b \cdot \sin\alpha \\ 2)\ \sin a \cdot \sin\gamma = \sin c \cdot \sin\alpha \\ 3)\ \sin b \cdot \sin\gamma = \sin c \cdot \sin\beta \end{cases}$$

oder $\sin a : \sin\alpha = \sin b : \sin\beta = \sin c : \sin\gamma$.

Durch diese drei Gleichungen findet sich jedoch die Aufgabe des §. 97. nicht vollständig gelöst, weil jede von ihnen aus den beiden andern gefolgert werden kann, solche daher nur als zwei verschiedene Gleichungen anzusehen sind.

§. 199. Aufgabe.

Aus der Figur (Fig. 68.) noch eine Gleichung abzuleiten, in welcher auch Cosinus vorkommen.

Auflösung. Man denke sich der größern Bequemlichkeit wegen wiederum $DC = 1$, so hat man $DF = \cos b$. Drückt man daher dieselbe Länge DF noch einmal aus, so hat man die verlangte Gleichung. Es ist aber DF die Summe aus DH und JE, also darf man nur diese letztern ausdrücken. Es ist ferner $DH = DG \cdot \cos c$ und $DG = \cos a$; folglich

$$1)\ DH = \cos a \cdot \cos c.$$

Ferner ist $JE = EG \cdot \sin c$, $EG = CG \cdot \cos\alpha$ und $CG = \sin a$;

folglich, wenn man diese Werthe subſtituirt,

$$2)\ JE = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta.$$

Addirt man nun die 1. und 2., ſo erhält man

$$3)\ \cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta.$$

§. 200. Zuſatz.

Man muß ſich nun die Mühe geben, nachzuweiſen, daß, ſo wie die vorſtehende Gleichung gilt, wenn die (Figur 68.) zu Grunde gelegt wird, ſolche auch noch wahr bleibe, die ſenkrechte Linie CE mag dieſe oder jede andere der (§§. 67.—70.) aufgezählten, möglichen Lagen einnehmen. — Dann gilt dieſelbe Gleichung auch in Bezug auf jeden der drei Winkel des Dreiecks, ſo daß man hat

$$\text{II.}\begin{cases} 1)\ \cos a = \cos b \cdot \cos c + \cos \alpha \cdot \sin b \cdot \sin c \\ 2)\ \cos b = \cos a \cdot \cos c + \cos \beta \cdot \sin a \cdot \sin c \\ 3)\ \cos c = \cos a \cdot \cos b + \cos \gamma \cdot \sin a \cdot \sin b. \end{cases}$$

Und eine dieſer drei Gleichungen in Verbindung mit zwei der obigen Gleichungen (§. 199.) reicht hin, um aus drei gegebenen der ſechs Stücke α, β, γ, a, b und c, die übrigen drei durch Rechnung zu finden. — Daher iſt jetzt die Aufgabe des §. 198. vollſtändig gelöſt.

Anmerkung. Wollte man die Gleichungen I. gar nicht gebrauchen, ſo würden die Gleichungen II., weil ſie alle drei von einander ganz unabhängig ſind, an ſich ſchon die Aufgabe des §. 198. vollſtändig löſen. — Und wollte man ſo viel wie möglich rein analytiſch zu Werke gehen, ſo müßte man in allen möglichen Lagen der Figur bloß die drei Gleichungen II. entwickeln; dann aber die Figur nicht mehr zu Hülfe nehmen.

§. 201. Zuſatz.

Denkt man ſich zu dem gegebenen Dreiecke das Ergänzungs-Dreieck, ſo verſchafft man ſich durch dieſes geometriſche Hülfs-

mittel leicht noch ein System von drei Gleichungen, welche statt der letztern (in II.) genommen werden können. —

Sind nämlich α', β', γ' die Winkel, und a', b', c' die Seiten des Ergänzungs-Dreiecks, so finden obige drei Gleichungen II. offenbar auch zwischen den Seiten und Winkeln des Ergänzungs-Dreiecks statt, so daß sie noch gelten, wenn a', b', c', α', β', γ' bezüglich statt a, b, c, α, β, γ gesetzt werden.

Weil aber in diesen Ergänzungs-Dreiecken $\alpha' = 180^0 - a$, $\beta' = 180^0 - b$ und $\gamma' = 180^0 - c$, $a' = 180^0 - \alpha$, $b' = 180^0 - \beta$ und $c' = 180^0 - \gamma$ ist, — so werden diese drei neuen Gleichungen in a', b', c', α', β', γ', sogleich in folgende übergehen:

$$\text{III.} \begin{cases} 1)\ \cos\alpha = -\cos\beta\cdot\cos\gamma + \cos a\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \\ 2)\ \cos\beta = -\cos\alpha\cdot\cos\gamma + \cos b\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma \\ 3)\ \cos\gamma = -\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta. \end{cases}$$

Anmerkung. Da ein jedes der beiden letztern Systeme (II. und III.) von Gleichungen zur Bestimmung der Verhältnisse der Stücke a, b, c, α, β, γ zu einander, vollkommen ausreicht, so muß man aus einem beliebigen dieser zwei Systeme die beiden übrigen jedesmal auf rein analytischem Wege, d. h. durch bloße Rechnung ableiten können, ohne weder die Figur noch das Ergänzungs-Dreieck zu Hülfe nehmen zu müssen.

Es seyen z. B. gegeben die drei Gleichungen des zweiten Systems

$$1)\ \cos a = \cos b\cdot\cos c + \cos\alpha\cdot\sin b\cdot\sin c$$
$$2)\ \cos b = \cos a\cdot\cos c + \cos\beta\cdot\sin a\cdot\sin c$$
$$3)\ \cos c = \cos a\cdot\cos b + \cos\gamma\cdot\sin a\cdot\sin b,$$

und nun die Gleichungen I. und dann auch die Gleichungen III. auf rein rechnendem Wege abzuleiten: — Zu dem Ende finde man aus den drei gegebenen Gleichungen II. $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$; und daraus wiederum $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, indem man $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$; $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma}$ zu Hülfe nimmt.

Setzt man dann der Kürze wegen

$$4)\ \frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}}{\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c}=M,$$

so erhält man

$$5)\ \sin\alpha=M\cdot\sin a;\quad 6)\ \sin\beta=M\cdot\sin b;\quad 7)\ \sin\gamma=M\cdot\sin c.$$

Und dividirt man diese drei Gleichungen paarweise durch einander, so erhält man die Gleichungen I.

Ferner folgt, wenn man die beiden letzten der vorstehenden Gleichungen mit einander multiplicirt, und statt M^2 seinen Werth (aus 4.) substituirt

$$8)\ \sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\cdot\sin b\cdot\sin c}$$

und (aus 2. und 3.)

$$\cos\beta\cdot\cos\gamma=\frac{(\cos b-\cos a\cdot\cos c)(\cos c-\cos a\cdot\cos b)}{\sin^2 a\cdot\sin b\cdot\sin c}$$

oder

$$9)\ \cos\beta\cdot\cos\gamma=\frac{\cos b\cdot\cos c-\cos a\cdot\cos^2 b-\cos a\cdot\cos^2 c+\cos^2 a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\cdot\sin b\cdot\sin c}.$$

Multiplicirt man nun die Gleichung 8. mit $\cos a$ und subtrahirt von der entstehenden die Gleichung 9., so erhält man, wenn noch $\sin^2 a$ statt $1-\cos^2 a$ gesetzt wird,

$$-\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos a\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{\cos a\cdot\sin^2 a+\cos b\cdot\cos c\cdot\cos^2 a-\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\cdot\sin b\cdot\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}.$$

Und weil (aus 1.) letzterer Ausdruck nichts weiter ist als $\cos\alpha$, so hat man

$$-\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos a\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\cos\alpha,$$

welches die erste Gleichung des Systemes III. ist. Eben so können aber auch die beiden andern Gleichungen in III. gefunden werden.

Umgekehrt, wenn man die Gleichungen III. allein als gegeben ansieht, die Gleichungen I. und II. daraus abzuleiten, wird jedem gelingen, der die vorstehende Ableitung näher betrachtet, und für den jetzigen Fall eine analoge durchzuführen versucht.

§. 202. Aufzählung der möglichen Aufgaben.

Es können aber in einem körperlichen (oder sphärischen) Dreieck gegeben seyn:

A) alle drei Seiten
B) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel
C) zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel
D) eine Seite und zwei anliegende Winkel
E) eine Seite und ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel, endlich
F) alle drei Winkel.

Im Falle A kann gesucht seyn einer der Winkel.

Im Falle B kann man suchen die 3te Seite, und auch einen der beiden unbekannten Winkel.

Im Falle C kann jedes der drei übrigen Stücke gesucht werden.

Im Falle D kann man eine der beiden andern Seiten suchen, und den dritten Winkel.

Im Falle E kann man jedes der drei übrigen Stücke suchen.

Im Falle F dagegen kann eine der drei Seiten gesucht werden.

Es werden daher in allem, zwölf verschiedene Aufgaben statt finden, welche wir hier noch näher schematisiren wollen, nämlich:

Gegeben	Gesucht
a, b, c	1) α;
a, b, γ	2) c; 3) α;
a, b, α	4) c; 5) β; 6) γ;
a, α, β	7) b; 8) c; 9) γ;
a, β, γ	10) b; 11) α;
α, β, γ	12) a.

Alle diese Aufgaben müssen nun durch analytische Behandlung eines der beiden Systeme von Gleichungen (II. oder III.), z. B. der Gleichungen II., ohne Weiters gelöst werden können. — Es ist jedoch bequem, wenn man alle drei Systeme (I.—III.) gleichzeitig benutzt.

§. 203. Aufgabe.

Aus den drei Gleichungen

$$\text{IV.}\begin{cases} 1)\ \cos a = \cos b \cdot \cos c + \cos\alpha \cdot \sin b \cdot \sin c \\ 2)\ \cos b = \cos a \cdot \cos c + \cos\beta \cdot \sin a \cdot \sin c \\ 3)\ \cos c = \cos a \cdot \cos b + \cos\gamma \cdot \sin a \cdot \sin b, \end{cases}$$

wenn von den sechs Stücken α, β, γ, a, b und c je drei als gegeben angesehen werden, die drei übrigen wirklich zu finden, d. h. die bereits aufgelösten Gleichungen hinzustellen.

Auflösung. A) Die Gleichungen II. 1.—3. geben unmittelbar die dritte Seite, wenn die beiden andern Seiten gegeben sind und der eingeschlossene Winkel, in bereits aufgelöster Form. — Sie lösen den Fall 2. des §. 202.

B) Betrachtet man aber ferner die Gleichung 1., so findet sich, daß sie nach jedem ihrer vier Buchstaben aufgelöst werden kann, einmal nach a, dann nach α, zuletzt nach b und (durch bloße Vertauschung des b mit dem c) auch nach c.

Nach α aufgelöst erhält man

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c},$$

welches den Winkel α giebt, wenn die drei Seiten a, b, c ge-

geben sind. — Und nimmt man die beiden andern Gleichungen zu Hülfe, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} 4)\ \cos\alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\ 5)\ \cos\beta &= \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \\ 6)\ \cos\gamma &= \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} \end{aligned}\right\}$$

und diese Gleichungen lösen den Fall 1. des §. 202.

Man löse ferner die Gleichung 1. nach b auf; man finde also zuerst

$$\cos a - \cos b \cdot \cos c = \cos\alpha \cdot \sin b \cdot \sin c$$

dann, wenn man diese Gleichung quadrirt:

$$\cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos c \cdot \cos b + \cos^2 b \cdot \cos^2 c = \cos^2\alpha \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c;$$

oder, wenn man $1 - \cos^2 b$ statt $\sin^2 b$ schreibt und die ganze Gleichung nach $\cos b$ ordnet:

$$(\cos^2 c + \cos^2\alpha \cdot \sin^2 c)\cos^2 b - 2\cos a \cdot \cos c \cdot \cos b + (\cos^2 a - \cos^2\alpha \cdot \sin^2 c) = 0,$$

woraus sich findet

$$\cos b = \frac{\cos a \cdot \cos c \pm \cos\alpha \cdot \sin c \cdot \sqrt{\cos^2\alpha \cdot \sin^2 c - \cos^2 a + \cos^2 c}}{\cos^2 c + \cos^2\alpha \cdot \sin^2 c}.$$

Wenn man hier b und c durchgehends mit einander vertauscht, so erhält man auch noch $\cos c$ in a, b und α ausgedrückt. Diese Gleichungen lösen den Fall 4. des §. 202.; weil aber sie und die ähnlichen, welche auch noch (aus 2. und 3.) auf ähnliche Weise erhalten werden, praktisch nicht weiter zu benutzen sind, so wollen wir sogleich zu den folgenden Aufgaben fortgehen.

C) Ist nämlich aus jeder der Gleichungen II. jeder der vier Buchstaben durch die drei übrigen ausgedrückt, wie solches

in A. und in B. geschehen, so kann man nun je zwei der drei Gleichungen II. durch Elimination eines jeden der beiden gemeinschaftlichen Unbekannten, mit einander verbinden und so neue Gleichungen sich verschaffen, zwischen vier der sechs Buchstaben.

Eliminirt man aber zunächst a aus den Gleichungen 1. und 2., so erhält man eine neue Gleichung zwischen α, β, b und c; und das Eliminiren selbst scheint am einfachsten dadurch bewerkstelligt werden zu können, daß man aus den Gleichungen II. zuerst die Gleichungen I. ableitet (nach Anmerk. §. 201.), dann in 2. statt *cos* a den Werth (aus 1. genommen) substituirt, in der neuen Gleichung dagegen statt *sin* a den Werth $\frac{\sin\alpha \cdot \sin b}{\sin\beta}$ setzt, welcher aus der ersten der Gleichungen I. sich ergiebt. Dies durchgeführt, giebt die Gleichung

$$\cot g\,\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin b = \cos b \cdot \sin c - \cos\alpha \cdot \sin b \cdot \cos c$$

als die gesuchte Eliminations-Gleichung zwischen α, β, b und c.

Diese Gleichung läßt sich nun nach α, nach β, nach b und nach c auflösen und giebt

$$\cot g\,\beta = \frac{\cot g\, b \cdot \sin c - \cos\alpha \cdot \cos c}{\sin\alpha},$$

und

$$\cot g\, b = \frac{\cos\alpha \cdot \cos c + \sin\alpha \cdot \cot g\,\beta}{\sin c}.$$

Dagegen wird *sin* c oder *cos* c, so wie *sin* α oder *cos* α durch eine quadratische Gleichung gefunden, welche wir ihrer praktischen Unbrauchbarkeit wegen, hier weglassen wollen. Und weil aus den übrigen Gleichungen II. durch Elimination von b (aus 2. und 3.) und von c (aus 3. und 1.) ähnliche Gleichungen sich ergeben, die man aber auch erhält, wenn man in den eben gefundenen, α, β und zugleich a und b, oder β und γ und zugleich b und c vertauscht, auch die Brüche wegschafft, um Formen zu bekommen, welche sich eben so leicht noch den Cotangenten der Winkel α, β, γ, als auch nach den Cotangenten der Seiten a, b, c (algebraisch) auflösen lassen, so bekommt man das nach-

stehende System von Gleichungen, nämlich:

$$\text{V.}\quad\begin{cases}\sin c\cdot cotg\, a = \sin\beta\cdot cotg\,\alpha + \cos c\cdot\cos\beta\\ \sin b\cdot cotg\, a = \sin\gamma\cdot cotg\,\alpha + \cos b\cdot\cos\gamma\\ \sin c\cdot cotg\, b = \sin\alpha\cdot cotg\,\beta + \cos c\cdot\cos\alpha\\ \sin a\cdot cotg\, b = \sin\gamma\cdot cotg\,\beta + \cos a\cdot\cos\gamma\\ \sin b\cdot cotg\, c = \sin\alpha\cdot cotg\,\gamma + \cos b\cdot\cos\alpha\\ \sin a\cdot cotg\, c = \sin\beta\cdot cotg\,\gamma + \cos a\cdot\cos\beta;\end{cases}$$

und jede dieser Gleichungen enthält zwei Winkel und zwei Seiten, wovon eine zwischen den beiden Winkeln liegt. Sie dienen daher zur Auflösung der Fälle 3., 6., 8. und 10. des §. 202.

D) Nachdem wir gesehen haben, daß, wenn man aus den beiden ersten der Gleichungen II. a oder b eliminirt, eine der Gleichungen V. sich ergiebt, so mag man noch bemerken, daß, wenn man aus den beiden erstern der Gleichungen II. den gemeinschaftlichen Buchstaben c eliminiren wollte, man die erste der Gleichungen I. erhalten müßte und erhalten würde, sobald man nur die Cosinus alle in Sinus verwandelt und alles gehörig reducirt *).

Diese Gleichungen I. zwischen zwei Seiten und den beiden gegenüberstehenden Winkeln, sind allemal dann anwendbar, wenn die drei gegebenen Stücke und das vierte gesuchte Stück einander paarweise gegenüber liegen. Sie lösen daher die Fälle 5. und 7. des §. 202.

E) Zuletzt bleibt nichts weiter mehr übrig, als aus allen drei Gleichungen II. je zwei der Seiten a, b, c zu eliminiren, und man wird dann eine Gleichung zwischen den drei Winkeln und einer Seite erhalten und dadurch die Fälle 9., 11. und 12. des §. 202. gelöst sehen, so daß nun alle zwölf möglichen Auf-

---

*) Einfacher jedoch bekommt man dieselbe Eliminationsgleichung zwischen a, b, α und β, wenn man so verfährt, wie in Anmerk. §. 201. solche bereits gefunden wurde.

gaben einzeln gelöst sind. — Das Elimiriren selber von b und c, ist aber (Anmerk. §. 201.) schon geschehen, und es sind daraus die Gleichungen III. hervorgegangen, so daß man diese letztern ohne Weiteres nehmen kann.

Anmerkung. Es würde hiermit die körperliche (oder sphärische) Trigonometrie ganz beendigt seyn, auch in ihren speciellen Aufgaben, wenn man nicht wünschen müßte, alle diese Gleichungen, durch welche die einzelnen Aufgaben gelöst sind, in eine andere und solche Form umgewandelt zu sehen, daß sich zur einzelnen numerischen Ausrechnung, Logarithmen bequem anwenden lassen. — Damit aber Logarithmen bequem angewandt werden können, müssen die Formeln vorzüglich Produkte und Quotienten von Sinus und Cosinus enthalten, und nicht Summen und Differenzen derselben. Man wird daher hier vorzüglich die Sätze (II. Bd. §. 147.) der analytischen Trigonometrie in Anwendung bringen müssen, wie wir solches sogleich in den einzelnen Fällen durchführen wollen.

§. 204. Aufgabe.

Aus den drei gegebenen Seiten a, b, c den Winkel α des körperlichen (oder des sphärischen) Dreiecks zu finden, aber durch eine Formel, auf welche die Logarithmen bequem anwendbar sind.

Auflösung. Aus der ersten der Gleichungen II. hat man

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

und man darf diese Formel nur noch so umwandeln, daß sie für logarithmische Berechnungen bequem wird. — Man findet aber aus ihr (nach II. Bd. §. 147.)

$$1 - \cos\alpha = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \cdot \sin c},$$

und wenn man beide letztern durch einander dividirt, weil $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = tg^2\,\frac{1}{2}\alpha$ ist,

$$tg^2\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos(b-c)-\cos a}{\cos a-\cos(b+c)};$$

und, wenn hier (nach II. Bd. §. 149.) die Differenzen der Cosinus in Produkte verwandelt werden:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c+a)\cdot\sin\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sin\frac{1}{2}(a-b-c)}}\ *).$$

§. 205. Zusatz.

Man gebraucht auch zu demselben Behufe die Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\cdot\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\cdot\sin c}},$$

welche dadurch leicht erhalten wird, daß man aus

$$\cos\alpha = \frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c},$$

$1-\cos\alpha$, d. h. $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ entwickelt und dabei die Summe oder Differenz der Cosinus (nach II. Bd. §. 149.) in Produkte verwandelt.

Anmerkung. Hierdurch ist aber wiederum der Fall 1. des §. 202. gelöst.

§. 206. Aufgabe.

Aus den drei gegebenen Winkeln α, β, γ die Seite a

---

*) Bei wirklichen Ausrechnungen können aber in dieser Formel negative Bogen entstehen. Man wird dann statt $\sin(-x)$ überall $-\sin x$ setzen, die (—) Zeichen oben und unten durch gegenseitige Division wegschaffen, und dann lauter positive Sinus haben. Man kann auch die Formel sogleich auf ähnliche Weise umändern, nämlich

$$tg\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a-c)\cdot\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(b+c+a)\cdot\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}.$$

zu finden, auf eine Weise, welche bequem Logarithmen anwenden läßt.

Auflösung. Aus der ersten der Gleichungen III. hat man

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\gamma},$$

und man darf daher nur noch diese Formel so umwandeln, daß Logarithmen auf sie bequem angewandt werden können.

Zu dem Ende hat man:

$$1 - \cos a = -\frac{\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma},$$

$$1 + \cos a = \frac{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma},$$

also, wenn man durch einander dividirt und wie im vorhergehenden §. verfährt:

$$tg\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma+\alpha)\cdot\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma+\alpha)\cdot\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma-\alpha)}},$$

auf welche Formel Logarithmen bequem angewandt werden können.

§. 207. Zusatz.

Auch hier bedient man sich oft der andern Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}},$$

welche aus dem obigen $1-\cos a$, in so fern solches $=2\sin^2\frac{1}{2}a$ ist, sogleich hervorgeht, so oft man die Summe der Cosinus in Produkte verwandelt.

Anmerkung. Hierdurch löset sich der Fall 12. des §. 202.

§. 208. Aufgabe.

In einem sphärischen (oder körperlichen) Dreiecke sind zwei Winkel α und β und die dazwischen liegende Seite c gegeben;

man soll die beiden andern Seiten so finden, daß sie bequem berechnet werden können, sobald numerische Werthe gegeben sind.

Auflösung. Man findet:

$$\text{VI.} \begin{cases} 1)\ tg\,\frac{1}{2}(b-a) = tg\,\frac{1}{2}c \cdot \dfrac{sin\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{sin\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)} \\ 2)\ tg\,\frac{1}{2}(b+a) = tg\,\frac{1}{2}c \cdot \dfrac{cos\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{cos\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)} \end{cases}$$

und weil diese Formeln sogleich die halbe Summe $\frac{1}{2}(b+a)$ und die halbe Differenz $\frac{1}{2}(b-a)$ der gesuchten Seiten liefern, so darf man diese Werthe nur addiren oder subtrahiren, um b oder a selbst zu haben.

Ableitung der Formeln 1. und 2. Man hat aus den Gleichungen I.:

$$sin\,\beta : sin\,\alpha = sin\,b : sin\,a;$$

daher $(sin\,\beta + sin\,\alpha) : (sin\,\beta - sin\,\alpha) = (sin\,b + sin\,a) : (sin\,b - sin\,a)$, oder (nach II. Bd. §. 149. und §. 169.)

$$\text{A...}\quad tg\,\tfrac{1}{2}(b-a) \cdot cotg\,(b+a) = \frac{sin\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha) \cdot cos\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{sin\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha) \cdot cos\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}.$$

Ferner hat man aus den Gleichungen II., wenn man die ersten Glieder rechts auf die linke Seite bringt, was aus den beiden ersten Gleichungen dann wird, durch einander dividirt, und dabei statt $\frac{sin\,b}{sin\,a}$ lieber den gleichen Quotienten $\frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha}$ schreibt,

$$\frac{cos\,a - cos\,b \cdot cos\,c}{cos\,b - cos\,a \cdot cos\,c} = \frac{sin\,\beta \cdot cos\,\alpha}{sin\,\alpha \cdot cos\,\beta}.$$

Addirt man die Einheit auf beiden Seiten, und subtrahirt man sie nachgehends auf beiden Seiten, so erhält man noch:

$$\text{B...}\quad \frac{(cos\,a + cos\,b)(1 - cos\,c)}{cos\,b - cos\,a \cdot cos\,c} = \frac{sin\,(\beta+\alpha)}{sin\,\alpha \cdot cos\,\beta}$$

und

$$\text{C...}\quad \frac{(cos\,a - cos\,b)(1 + cos\,c)}{cos\,b - cos\,a \cdot cos\,c} = \frac{sin\,(\beta-\alpha)}{sin\,\alpha \cdot cos\,\beta}.$$

Dividirt man daher diese beiden letztern Gleichungen durch einander, so giebt dies

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} \cdot \frac{1 - \cos c}{1 + \cos c} = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Verwandelt man hier die Summe und die Differenz der Cosinus in Produkte (nach II. Bd. §. 149.) und bemerkt man dabei, daß

$$\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c} = tg^2 \tfrac{1}{2} c$$

und daß

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2} x \cdot \cos \tfrac{1}{2} x$$

ist, so geht obige Formel über in

$$\text{D....} \quad \cot g \tfrac{1}{2}(b - a) \cdot \cot g \tfrac{1}{2}(b + a) \cdot tg^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)}{\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)}.$$

Und dividirt man die Gleichung A. durch die Gleichung D., so ergiebt sich die obige 1. Multiplicirt man aber die Gleichung D. mit der Gleichung A., so ergiebt sich zwar noch nicht augenblicklich die obige Formel 2., aber letztere geht doch sogleich daraus hervor, wenn man die Cotangenten in Tangenten verwandelt und dann $tg \tfrac{1}{2}(b + a)$ ableitet *).

Weil man aber durch das so eben beschriebene Verfahren die Formeln NN. 1. und 2. nur dadurch erhält, daß man links und rechts noch die Quadrat-Wurzel nimmt, so muß man der einen Seite der beiden Gleichungen noch ein $\pm$ Zeichen vorsetzen und nun erst untersuchen, ob allemal das $+$ Zeichen genommen werden darf, oder ob und in welchen Fällen auch das $-$ Zeichen genommen werden muß.

Um diese Untersuchung durchzuführen, bedenke man, daß α, β, γ und a, b, c immer kleiner als 180° gedacht sind. Deshalb ist $\tfrac{1}{2} c < 90°$, $\tfrac{1}{2}(b - a) < 90°$, $\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) < 90°$ und nur $\tfrac{1}{2}(b + a)$ und $\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)$ können auch größer als 90° oder $= 90°$ werden. In der Formel N. 1. sind daher alle einzelne Faktoren, so wie der Ausdruck zur linken allemal positiv; deshalb muß das $+$ Zeichen vom Doppel-($\pm$) Zeichen genommen werden. D. h. die Formel N. 1. gilt in allen Fällen.

In der Formel N. 2. dagegen kann, im Falle β oder α, oder beide, stumpfe Winkel seyn sollten, der Nenner $\cos \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)$ und dadurch der ganze Ausdruck zur Rechten negativ werden. Die Formel D. zeigt aber deutlich, daß $\cos \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)$ und $\cot g \tfrac{1}{2}(b + a)$, also auch $tg \tfrac{1}{2}(b + a)$,

---

*) Man konnte die Ableitung dadurch etwas bequemer einrichten, daß man bei der Division der Gleichungen B. und C in umgekehrter Ordnung dividirte, d. h. die untere C. durch die obere D. — In dem Endresultate D. würden sich dann sogleich Tangenten gezeigt haben, statt der Cotangenten.

allemal zugleich positiv, oder zugleich negativ sind. Folglich gilt auch die Formel N. 2., so wie sie da steht, in allen Fällen.

Anmerkung 1. Es ist aber dadurch der Fall 10. des §. 202. gelöst.

Anmerkung 2. Zugleich erhellet aus dem letztern Theile der vorliegenden Untersuchung, daß $\frac{1}{2}(b+a)$ und $\frac{1}{2}(\beta+\alpha)$ allemal gleichartig, d. h. beide spitz oder beide stumpf sind.

§. 209. Aufgabe.

Es sind gegeben zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ. Man soll die beiden andern Winkel α und β finden, durch Formeln, die bei dem numerischen Rechnen, Logarithmen bequem anwenden lassen.

Auflösung. Man findet:

$$\text{VII.} \begin{cases} 1)\ tg\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)=cotg\,\frac{1}{2}\gamma\cdot\dfrac{sin\,\frac{1}{2}(b-a)}{sin\,\frac{1}{2}(b+a)} \\ 2)\ tg\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)=cotg\,\frac{1}{2}\gamma\cdot\dfrac{cos\,\frac{1}{2}(b-a)}{cos\,\frac{1}{2}(b+a)} \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen sich sogleich die halbe Differenz $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ und die halbe Summe $\frac{1}{2}(\beta+\alpha)$ ergiebt, welche dann addirt oder subtrahirt, β und α selbst geben.

Beweis. Man kann die Formeln 1. und 2. genau eben so aus den Gleichungen III. ableiten, wie die des vorhergehenden §. aus den Gleichungen II. abgeleitet sind, und es wird den Anfängern dieser Versuch empfohlen. — Nimmt man aber das Ergänzungs-Dreieck zu Hülfe, dessen Seiten a', b', c' und dessen Winkel α', β', γ' seyn mögen, so hat man für dieses Dreieck nach dem vorhergehenden §.:

$$tg\,\tfrac{1}{2}(b'-a')=tg\,\tfrac{1}{2}c'\cdot\frac{sin\,\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')}{sin\,\frac{1}{2}(\beta'+\alpha')}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(b'+a')=tg\,\tfrac{1}{4}c'\cdot\frac{cos\,\frac{1}{2}(\beta'-a')}{cos\,\frac{1}{2}(\beta'+a')}$$

und setzt man hier, wo

$a'+\alpha=b'+\beta=c'+\gamma=\alpha'+a=\beta'+b=\gamma'+c=180°$ ist, statt

b′, c′, a′, α′, β′, ihre Werthe, nämlich $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$, $180^0 - \alpha$, ꝛc. ꝛc, so erhält man die obigen Gleichungen 1. und 2. augenblicklich.

Anmerkung. Dadurch löset sich aber der Fall 3. des §. 203.

Uebrigens nennt man die Formeln der beiden letztern §§. (208. 209. VI. und VII.) die Reper'schen Analogien, in so fern sie von Reper zuerst mitgetheilt worden sind.

§. 210. Zusatz.

Dieser Reper'schen Analogien kann man sich auch bedienen, wenn einmal vier Stücke bekannt seyn sollten, nämlich zwei Seiten und ihre gegenüber stehenden Winkel, die dritte Seite oder den dritten Winkel zu finden. Man erhält nämlich:

$$1)\quad tg\,\tfrac{1}{2}c = tg\,\tfrac{1}{2}(b-a)\cdot\frac{sin\,\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)}{sin\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$2)\quad tg\,\tfrac{1}{2}c = tg\,\tfrac{1}{2}(b+a)\cdot\frac{cos\,\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)}{cos\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$3)\quad cotg\,\tfrac{1}{2}\gamma = tg\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\frac{sin\,\tfrac{1}{2}(b+a)}{sin\,\tfrac{1}{2}(b-a)}$$

$$4)\quad cotg\,\tfrac{1}{2}\gamma = tg\,\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)\cdot\frac{cos\,\tfrac{1}{2}(b+a)}{cos\,\tfrac{1}{2}(b-a)}.$$

Auch kann man sich derselben Formeln 1.—4. noch zu demselben Zwecke bedienen, wenn weder die Seiten noch die Winkel, sondern nur ihre Summen oder Differenzen gegeben sind, wie bei dem bloßen Anblicke in die Augen fällt.

Man bedient sich aber in den hier erwähnten Fällen lieber der sogenannten Gaußischen Formeln, welche wir in den nächsten §§. etwas näher betrachten wollen.

§. 211.

Wir geben hier noch die, in Deutschland unter dem Namen

der Gaußischen *) bekannten Formeln, nämlich

$$\text{VIII.}\begin{cases} 1)\ \dfrac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}; \\ 2)\ \dfrac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}; \\ 3)\ \dfrac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}; \\ 4)\ \dfrac{\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\cos\frac{1}{2}c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}. \end{cases}$$

Um diese Gleichungen zu erhalten, multiplicire und dividire man zunächst die Neper'schen Analogien VI. 1. u. 2. und VII. 1. u. 2. durch einander, so daß man, wenn $\frac{\sin}{\cos}$ und $\frac{\cos}{\sin}$ bezüglich statt *tg* und *cotg* gesetzt, und zugleich die Sinus und Cosinus der halben Summen und Differenzen auf eine und dieselbe Seite gebracht werden, erhält:

1') aus der Multiplikation der VI. 1. mit der VII. 1., oder auch der VI. 2. mit der VII. 2.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)\cdot\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(b-a)\cdot\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}=\frac{\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}c\cdot\sin\frac{1}{2}\gamma};$$

2') aus der Division der VI. 1. durch die VII. 1.

$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}(b-a)\cdot\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cdot\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\sin\frac{1}{2}(b+a)\cdot\cos\frac{1}{2}(b-a)}=\frac{\sin\frac{1}{2}c\cdot\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}\gamma};$$

3') endlich aus der Division der VI. 2. durch die VII. 2.

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cdot\sin\frac{1}{2}(b+a)\cdot\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos^2\frac{1}{2}(b+a)\cdot\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cdot\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}=\frac{\sin\frac{1}{2}c\cdot\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}\gamma};$$

Ferner zieht man aus den nachstehenden Gleichungen

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}=\frac{\sin b+\sin a}{\sin\beta+\sin\alpha},$$

wenn die Summen der Sinus in Produkte verwandelt werden, und wenn

---

*) Diese Formeln sind zuerst von Delambre in der Connaissance des temps vom Jahre 1809. S. 45., aber auch in der theoria motus von Gauß (1809. S. 21.), von Beiden ohne Beweis mitgetheilt und empfohlen worden. Man findet solche daher auch zuweilen unter dem Namen der Delambre'schen angeführt.

man noch $2\,sin\,\frac{1}{2}c\cdot cos\,\frac{1}{2}c$ statt $sin\,c$ und $2\,sin\,\frac{1}{2}\gamma\cdot cos\,\frac{1}{2}\gamma$ statt $sin\,\gamma$ schreibt, sogleich diese andere Gleichung, nämlich

$$4')\quad \frac{sin\,\frac{1}{2}(b+a)\cdot cos\,\frac{1}{2}(b-a)}{sin\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cdot cos\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}=\frac{sin\,\frac{1}{2}c\cdot cos\,\frac{1}{2}c}{sin\,\frac{1}{2}\gamma\cdot cos\,\frac{1}{2}\gamma}.$$

Wird nun die 1'. mit der 4'. multiplicirt, um $cos\,\frac{1}{2}c$ zu eliminiren, so erhält man, wenn noch links und rechts die Quadrat-Wurzel genommen wird, die zu erweisende Gleichung 2. — Wird dagegen die 1'. durch die 4'. dividirt, um $sin\,\frac{1}{2}c$ zu eliminiren, so erhält man die zu erweisende Gleichung 3. — Wird ferner die 2'. mit der 4'. multiplicirt, um $cos\,\frac{1}{2}c$ zu eliminiren, so erhält man die zu erweisende Gleichung 1. — Und wird zuletzt noch die 3'. durch die 4'. dividirt, um $sin\,\frac{1}{2}c$ zu eliminiren, so ergiebt sich die Formel 4., wenn man nur jedesmal links und rechts die Quadrat-Wurzel nimmt. Die Richtigkeit der Vorzeichen erhellet aber aus §. 208. Anmerk. 2.

§. 112.

Schafft man die Brüche weg, so können dieselben Formeln auch so erscheinen

$$\text{IX.}\begin{cases} 1)\ sin\,\frac{1}{2}c\cdot sin\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)=cos\,\frac{1}{2}\gamma\cdot sin\,\frac{1}{2}(b-a)\\ 2)\ sin\,\frac{1}{2}c\cdot cos\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)=sin\,\frac{1}{2}\gamma\cdot sin\,\frac{1}{2}(b+a)\\ 3)\ cos\,\frac{1}{2}c\cdot sin\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)=cos\,\frac{1}{2}\gamma\ \ cos\,\frac{1}{2}(b-a)\\ 4)\ cos\,\frac{1}{2}c\cdot cos\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)=sin\,\frac{1}{2}\gamma\cdot cos\,\frac{1}{2}(b+a). \end{cases}$$

Dividirt man aber hier die 1. durch die 2., die 3. durch die 4.; ferner die 1. durch die 3. und die 2. durch die 4., so erhält man augenblicklich wieder die Neper'schen Analogien VI. 1. 2. u. VII. 1. 2. Man kann daher diese Gaußischen Formeln in allen den Fällen anwenden, in denen man die Neper'schen Analogien gebrauchen kann, also wenn zwei Winkel α und β und die zwischenliegende Seite c, oder wenn zwei Seiten a und b und der zwischenliegende Winkel γ gegeben sind; während erstere in so fern noch bequemer sind, als sie auch jedesmal sogleich das sechste Stück dazu liefern. Die Gaußischen Formeln sind nämlich unter allen Systemen von Gleichungen I.—VIII. die einzigen, welche alle sechs Stücke des Dreiecks zugleich enthalten.

Wären z. B. die beiden Winkel α und β und die zwischenliegende Seite c gegeben, so würde man $log\ sin \frac{1}{2}c$ und $log\ sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ addiren, und hätte dann (nach der 1.)

A... $log\,[cos \frac{1}{2}\gamma \cdot sin \frac{1}{2}(b-a)]$

Hierauf würde man $log\ cos \frac{1}{2}c$ und $log\ sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha)$ addiren und hätte (nach 3.)

B... $log\,[cos \frac{1}{2}\gamma \cdot cos \frac{1}{2}(b-a)]$

Subtrahirte man dann den Logarithmen B von dem Logarithmen A, so bliebe

C... $log\ tg \frac{1}{2}(b-a)$;

folglich hätte man $\frac{1}{2}(b-a)$ gerade so wie durch die Neper'sche Analogie VI. 1. gefunden.

Die 2. und 4. auf dieselbe Weise behandelt, würden dann noch $\frac{1}{2}(b+a)$ eben so dazu liefern, wie die Neper'sche Analogie VI. 2. solches erlaubt haben würde.

Die hiesigen Formeln 1.—4. geben aber nun sogleich $cos \frac{1}{2}\gamma$ zweimal und auch $sin \frac{1}{2}\gamma$ zweimal dazu, so daß man nicht bloß das sechste Stück sogleich gefunden, sondern auch eine eben so einfache als bequeme Controle der Rechnung hat.

Eben so würde man aus zweien Seiten a und b und dem zwischenliegenden Winkel γ die übrigen drei Stücke bequem berechnen; wie die nachfolgenden Beispiele zeigen sollen.

Beispiel 1. Es sey nämlich gegeben

$b = 56^\circ\ 19'\ 40''$; $a = 20^\circ\ 16'\ 38''$

und $\gamma = 114^\circ\ 20'\ 16''$; also $\frac{1}{2}\gamma = 57^\circ\ 10'\ 8''$;

$\frac{1}{2}(b+a) = 38^\circ\ 18'\ 9''$ und $\frac{1}{2}(b-a) = 18^\circ\ 1'\ 31''$;

so stellt man nun folgende Rechnung an. Man sucht zunächst aus den Tafeln

1')	$log\ sin \frac{1}{2}(b-a)$	= 9,4905716
2')	$log\ cos \frac{1}{2}(b-a)$	= 9,9781441
3')	$log\ sin \frac{1}{2}(b+a)$	= 9,7922609
4')	$log\ cos \frac{1}{2}(b+a)$	= 9,8947309
5')	$log\ sin \frac{1}{2}\gamma$	= 9,9244201
6')	$log\ cos \frac{1}{2}\gamma$	= 9,7341311

Dann berechnet man hieraus:

$1'.+6'.$ d. h. (nach d. F. 1.)

$7')\ log\,[sin\,\frac{1}{2}c \cdot sin\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)] = 9{,}2247027;$

$3'.+5'.$ d. h. (nach d. F. 2.)

$8')\ log\,[sin\,\frac{1}{2}c \cdot cos\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)] = 9{,}7166810.$

Ferner $7'.-8'.$ d. h.

$9')\ log\,tg\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = 9{,}5080217,$

woraus $\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = 17^\circ\ 51'\ 17{,}''8.$

Ferner $2'.+6'.$ d. h. (nach d. F. 3.)

$10')\ log\,[cos\,\frac{1}{2}c \cdot sin\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)] = 9{,}7122752;$

dann $4'.+5'.$ d. h. (nach d. F. 4.)

$11')\ log\,[cos\,\frac{1}{2}c \cdot cos\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 9{,}8191510;$

nun $10'.-11'.$ d. h.

$12')\ log\,tg\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 9{,}8931242;$

folglich $\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 38^\circ\ 1'\ 12{,}''4$

und $\beta = 55^\circ\ 52'\ 30{,}''2,$ so wie $\alpha = 20^\circ\ 9'\ 54{,}''6.$

Sucht man nun noch aus den Tafeln

$13')\ log\,cos\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = 9{,}9785620$

$14')\ log\,cos\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 9{,}8964129,$

so ergiebt sich noch aus $8'.-13'.$

$15')\ log\,sin\,\frac{1}{2}c = 9{,}7381190$

und aus $11'-14'.$

$16')\ log\,cos\,\frac{1}{2}c = 9{,}9227381;$

also auch noch aus $15'.-16'.$

$17')\ log\,tg\,\frac{1}{2}c = 9{,}8153809;$

mithin aus einer der drei letztern Gleichungen

$\frac{1}{2}c = 33^\circ\ 10'\ 22{,}''06$

und $c = 66^\circ\ 20'\ 44{,}''12.$

Findet sich endlich aus zwei der drei letztern Gleichungen immer derselbe Werth von c, so ist dies eine Probe der Rechnung.

Beispiel 2. Es seyen in einem sphärischen Dreieck gegeben: die Seite $c = 66^\circ\ 20'\ 44''$ und die Winkel $\alpha = 20^\circ\ 9'\ 54''$ und $\beta = 55^\circ\ 52'\ 30''$; so daß man hat $\frac{1}{2}c = 33^\circ\ 10'\ 22'',$ $\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 38^\circ\ 1'\ 12''$ und

$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)=17^0\ 51''\ 18''$. Man soll die übrigen Stücke des Dreiecks berechnen.

Man schlage in den Tafeln zunächst die nachstehenden Logarithmen auf, nämlich

1′) $log\ sin\ \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ .... $= 9{,}4865837$
2′) $log\ cos\ \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ .... $= 9{,}9785620$
3′) $log\ sin\ \frac{1}{2}(\beta+\alpha)$ .... $= 9{,}7895371$
4′) $log\ cos\ \frac{1}{2}(\beta+\alpha)$ .... $= 9{,}8964129$
5′) $log\ sin\ \frac{1}{2}c$ .... $= 9{,}7381190$
6′) $log\ cos\ \frac{1}{2}c$ .... $= 9{,}9227380.$

Nun addire man 1′. und 5′. und man erhält dann (nach d. Form. 1.)

7′) $log\,[cos\ \frac{1}{2}\gamma \cdot sin\ \frac{1}{2}(b-a)] = 9{,}2247027.$

Ferner nehme man 3′.+6′., so hat man (nach 3.)

8′) $log\,[cos\ \frac{1}{2}\gamma \cdot cos\ \frac{1}{2}(b-a)] = 9{,}7122751.$

Die 7′.—8′. giebt nun

9′) $log\ tg\ \frac{1}{2}(b-a) = 9{,}5124276,$

woraus $\frac{1}{2}(b-a)=18^0\ 1'\ 31''$ hervorgeht.

Ferner addire man 2′. und 5′., so kommt (nach der Form. 2.)

10′) $log\,[sin\ \frac{1}{2}\gamma \cdot sin\ \frac{1}{2}(b+a)] = 9{,}7166810;$

addire auch noch 4′. und 6′., um (nach der Form. 4.) zu haben

11′) $log\,[sin\ \frac{1}{2}\gamma \cdot cos\ \frac{1}{2}(b+a)] = 9{,}8191509.$

Die 10′.—11′. giebt dann

12′) $log\ tg\ \frac{1}{2}(b+a) = 9{,}8975301,$

woraus $\frac{1}{2}(b+a)=38^0\ 18'\ 9''$ hervorgeht.

Aus dem nun gefundenen $\frac{1}{2}(b-a)$ und $\frac{1}{2}(b+a)$ folgt jetzt sogleich

$b=56^0\ 19'\ 40''$ und $a=20^0\ 16'\ 38''$.

Der dritte Winkel γ findet sich dann, indem man vorher schon, wie man zu $tg\ \frac{1}{2}(b-a)$ und zu $tg\ \frac{1}{2}(b+a)$ die Winkel in der Tafel aufschlug an denselben Stellen der Tafel sogleich abnahm

13′) $log\ cos\ \frac{1}{2}(b-a) = 9{,}9781440$

und

14′) $log\ cos\ \frac{1}{2}(b+a) = 9{,}8947309,$

nun aber 13′. von 8′., oder 14′. von 11′. subtrahirt. Dies giebt sogleich

15′) $log\ cos\ \frac{1}{2}\gamma$ .... $= 9{,}7341311$
16′) $log\ sin\ \frac{1}{2}\gamma$ .... $= 9{,}9244200$

und daraus auch noch, wenn man will

17') $log\ tg\ \frac{1}{2}\gamma = 10{,}1902889;$

findet sich nun aus zweien dieser drei letztern Resultate für $\frac{1}{2}\gamma$ allemal ein und dasselbe, nämlich

$$\frac{1}{2}\gamma = 57^\circ\ 10'\ 8'', \quad \text{also} \quad \gamma = 114^\circ\ 20'\ 16'',$$

so ist dieß zugleich eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

§. 213. Aufgabe.

Von zweien Seiten und den diesen gegenüberstehenden Winkeln sind drei Stücke gegeben; man soll das vierte finden, so daß Logarithmen bequem angewandt werden können.

Auflösung. Man nehme die Gleichungen I., nämlich:

$$sin\ a \cdot sin\ \beta = sin\ b \cdot sin\ \alpha,$$

so hat man das Verlangte.

Anmerkung. Es lösen sich hierdurch die Fälle 5. und 7. des (§. 202.); so daß auf's Neue, jedoch mit bequemer Anwendbarkeit der Logarithmen, die Fälle 1. 3. 5. 7. 10. und 12. des §. 202. gelöst sind. — Die übrigen Fälle 2. 4. 6. 8. 9. und 11. lösen sich endlich auch dadurch, daß man aus den gegebenen Stücken erst ein in den erstern sechs Fällen enthaltenes Hülfsstück findet, und dann das Gesuchte mittelst dieses Hülfsstückes nach einem derselben erstern sechs Fälle ableitet.

Man will z. B. den Fall 2. des §. 202. lösen, d. h. aus zwei Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite c finden; so findet man zuerst aus a, b und γ die beiden andern Winkel α und β (nach §. 210.); dann, indem man a, b, α und β als gegeben ansieht, die dritte Seite c (nach §. 211.).

Oder soll, wie in den Fällen 8. und 9. des §. 202. aus a, α, β, die Seite c oder der Winkel γ gefunden werden, so findet man zuerst b (nach §. 212.), dann c oder γ (nach §. 211.).

Anmerkung. Alle diese Entwickelungen gelten für jedes körperliche (oder sphärische) Dreieck, wie auch die einzelnen Winkel oder Seiten beschaffen seyn mögen; weil die Formeln II. für alle möglichen Fälle der Figur bewiesen, die übrigen Formeln aber alle aus diesen Gleichungen II. durch bloße Rechnung abgeleitet worden sind. — Es ist jedoch klar, daß wenn einer der Winkel ein rechter wird, wo dann das Dreieck ein rechtwinkliches genannt zu werden pflegt, die meisten der Formeln sich bedeutend vereinfachen werden, und daß es daher praktisch bequem ist, für das rechtwinkliche Dreieck die Formeln besonders sich zu bemerken, um sie bei den so häufig vorkommenden Fällen, sogleich und unmittelbar anwenden zu können.

§. 214. Aufgabe.

Alle Formeln zur bequemen Berechnung eines bei γ rechtwinklichen Dreiecks hinzustellen; also unter der Voraussetzung, daß c die Hypothenuse, a und b aber die Katheten des rechtwinklichen Dreiecks sind.

Auflösung. Diese Formeln sind folgende:

1) $\cos c = \cos a \cdot \cos b$;
2) $\cos c = \cot g\, \alpha \cdot \cot g\, \beta$;
3) $\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$;
4) $tg\, a = \sin b \cdot tg\, \alpha$;
5) $tg\, b = \cos \alpha \cdot tg\, c$;
6) $\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos a$;

und sie reichen hin, um, wenn im rechtwinklichen Dreiecke, außer dem rechten Winkel noch zwei Stücke gegeben sind, die übrigen durch bequeme logarithmische Rechnung zu finden.

Nachweisung. Es ist nämlich die hiesige 1. nichts anders, als die dritte der Gleichungen II., weil jetzt $\cos \gamma = 0$ ist. — Die hiesige 2. folgt unmittelbar aus der dritten der Gleichungen III. — Die hiesige 3. ist nichts weiter, als die zweite der Gleichungen I., weil hier $\sin \gamma = 1$ ist. — Die Gleichungen 4. und 5. ergeben sich sogleich aus denen IV. —

Endlich ergiebt sich die hiesige 6. unmittelbar aus der ersten der Gleichungen III.

Es mag nicht unnütz seyn, wenn wir hier noch zeigen, wie die vorstehenden Formeln für rechtwinkliche Dreiecke unmittelbar aus der Figur abgeleitet werden können. Es sey nämlich (Fig. 69.) **ABC** ein bei **C** rechtwinkliches Dreieck, so fällt die von **E** aus auf die Seite **b** (Ebene **ADC**) gefällte senkrechte **EF** ganz in die Ebene **BDC** und steht auch senkrecht auf **DC**. Zieht man daher noch **FG** senkrecht auf **AD** und **EG**, so ist **EGF** der Winkel α, und man hat die vier rechtwinklichen Dreiecke **DFE**, **DGF**, **DGE** und **DFG**, wo der rechte Winkel immer in die Mitte gestellt ist. Man hat daher:

1) $\frac{EF}{DE} = sin\ a$, 2) $\frac{DF}{DE} = cos\ a$, 3) $\frac{EF}{DF} = tg\ a$,

4) $\frac{FG}{DF} = sin\ b$, 5) $\frac{DG}{DF} = cos\ b$, 6) $\frac{FG}{DG} = tg\ b$,

7) $\frac{EG}{DE} = sin\ c$, 8) $\frac{DG}{DE} = cos\ c$, 9) $\frac{EG}{DG} = tg\ c$,

10) $\frac{EF}{EG} = sin\ \alpha$, 11) $\frac{FG}{EG} = cos\ \alpha$, 12) $\frac{EF}{FG} = tg\ \alpha$.

Multiplicirt man nun 5. und 2. mit einander, so erhält man:

$$cos\ b \cdot cos\ a = \frac{DG}{DF} \cdot \frac{DF}{DE} = \frac{DG}{DE} = cos\ c \quad \text{(nach 8.)};$$

und dies ist die Gleichung §. 214. N. 1. — Auf gleiche Weise giebt die Multiplikation der hiesigen Gleichungen 7. und 10. sogleich die Formel §. 214. N. 3. — Und die 4. mit der 12. multiplicirt giebt in Verbindung mit 3. sogleich §. 214. N. 4. — Und die 11. mit der 9. multiplicirt giebt in Verbindung mit der 6. die Gleichung §. 214. N. 5., so daß man hat:

13) $cos\ c = cos\ a \cdot cos\ b$, 14) $sin\ a = sin\ c \cdot sin\ \alpha$,

15) $tg\ a = sin\ b \cdot tg\ \alpha$, 16) $tg\ b = cos\ \alpha \cdot tg\ c$.

Weil jedoch α und β und zugleich **a** und **b** vertauscht werden können *), so hat man außerdem noch die Gleichungen

17) $sin\ b = sin\ c \cdot sin\ \beta$, 18) $tg\ b = sin\ a \cdot tg\ \beta$

und 19) $tg\ a = cos\ \beta \cdot tg\ c$.

---

*) In so fern man **GH** senkrecht auf die Ebene **BDC**, **HJ** senkrecht auf **BD**, und noch **GJ** ziehen kann, und **GJH** dann der Winkel β seyn muß, so daß man, was eben für α gefunden wurde, nun genau so für β finden kann.

Werden nun die 15. und die 18. mit einander multiplicirt, so ergiebt sich in Verbindung mit der 13. die Gleichung §. 214. N. 2. — Und wird zuletzt die 17. durch die 16. dividirt und statt *cos* c sein Werth (aus 13.) gesetzt, so hat man auch noch die Gleichung §. 214. N. 6. — Also sind alle sechs Gleichungen des §. 216. unmittelbar aus der Figur abgeleitet *).

§. 215. Aufgabe.

Wenn (W. a, α), (W. b, β) und (W. c, γ), die drei Neigungs-Winkel vorstellen, welche die Kanten der Winkel α, β, γ mit den gegenüberliegenden Seiten (=Flächen) a, b, c bilden; diese Winkel zu finden.

Auflösung. Die Ebene des Neigungs-Winkels zerlegt das sphärische Dreieck in zwei rechtwinkliche, deren Summe oder deren Differenz das sphärische Dreieck wieder giebt. Nun hat man (nach §. 214. N. 3.):

$$\sin(a, \alpha) = \sin b \cdot \sin\gamma = \sin c \cdot \sin\beta,$$
$$\sin(b, \beta) = \sin a \cdot \sin\gamma = \sin c \cdot \sin\alpha,$$
$$\sin(c, \gamma) = \sin a \cdot \sin\beta = \sin b \cdot \sin\alpha.$$

Welche drei Stücke daher gegeben seyn mögen, so lassen sich doch immer die übrigen finden, und so auch dann die Winkel (a, α), (b, β) und (c, γ).

Anmerkung. Und so hätten wir denn die körperliche oder sphärische Trigonometrie in ihren Hauptzügen beendet. Wie schon in der ebenen Trigonometrie, so auch hier, bleibt es zuweilen unbestimmt, ob, wenn von einer Seite oder von einem Win-

---

*) Man kann auch die Formel §. 214. N. 4. direkt aus der Figur ableiten. Es ist nämlich wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$HJ : EF = DJ : DF$$

und

$$FG : GH = DF : DG;$$

folglich wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt,

$$\frac{HJ}{GH} \cdot \frac{FG}{EF} = \frac{DJ}{DG}, \quad \text{d. h.} \quad \cot\beta \cdot \cot\alpha = \cos c.$$

Eben so kann man aber auch die Formel §. 214. N. 6. direkt aus der Figur ableiten.

kel ein Sinus gefunden worden, der dazu gehörige Bogen spitz oder stumpf seyn werde. Man muß zu dieser Ausmittelung dasjenige zu Hülfe nehmen, was §§. 67.—70. über die möglichen Fälle bei körperlichen (oder sphärischen) Dreiecken gesagt worden ist, und wenn man auch hier seinen Zweck nicht erreicht, so muß man statt der Sinus, lieber die Cosinus oder Cotangenten, oder Tangenten berechnen, welche im zweiten Quadranten negativ sind, also durch ihr Zeichen die gewünschte Entscheidung gewähren, wenn man es nicht vorzieht, halbe Seiten oder halbe Winkel in Rechnung zu bringen, welche hier allemal spitz sind.

§. 216.

Es können aber, im Falle zwei Seiten a und c und einer der gegenüber stehenden Winkel γ, oder zwei Winkel α und γ und eine der gegenüber liegenden Seiten a gegeben sind, wirklich zwei verschiedene Dreiecke existiren, welche diese gegebenen Stücke gemein haben, so daß wirklich für jedes der drei übrigen Stücke doppelte Werthe gefunden werden. Verfolgt man jedoch die Untersuchungen des zweiten Kapitels, so finden sich für diese beiden Fälle folgende Resultate:

1) Wenn a, c und γ gegeben sind, so giebt es **nur ein einziges Dreieck**,

so oft $\gamma = R$ (d. h. ein rechter Winkel)
oder γ spitz, a spitz und $c > a$
= γ spitz, a stumpf und $c > 2R - a$
= γ stumpf, a spitz und $c < 2R - a$
= γ stumpf, a stumpf und $c < a$,

und es giebt allemal **zwei verschiedene Dreiecke**

so oft γ spitz, a spitz und $c < a$,
oder γ spitz, a stumpf und $c < 2R - a$
= γ stumpf, a spitz und $c > 2R - a$
= γ stumpf, a stumpf und $c > a$
= γ spitz oder stumpf und a recht ist.

2) Sind aber α, γ und c gegeben, so existirt nur ein einziges Dreieck

wenn c ein rechter Winkel
oder c stumpf, α stumpf und $\gamma < \alpha$
= c stumpf, α spitz und $\gamma < 2R - \alpha$
= c spitz, α stumpf und $\gamma > 2R - \alpha$
= c spitz, α spitz und $\gamma > \alpha$,

und es giebt zwei verschiedene Dreiecke

wenn c stumpf, α stumpf und $\gamma > \alpha$
oder c stumpf, α spitz und $\gamma > 2R - \alpha$
= c spitz, α stumpf und $\gamma < 2R - \alpha$
= c spitz, α spitz und $\gamma < \alpha$
= c spitz oder stumpf, und $\alpha = R$ ist.

Anmerkung. Die schönsten und erfreulichsten Anwendungen der sphärischen Trigonometrie findet man in der sphärischen Astronomie, in der mathematischen Geographie und in der sogenannten trigonometrischen (oder höhern) Feldmeßkunst, weshalb das Studium dieser Wissenschaften vorzüglich denen zu empfehlen ist, welche Gegenheit zu haben wünschen, sphärische Trigonometrie in Anwendung zu bringen, und um so leichter empfohlen werden kann, als auch in den genannten Wissenschaften kaum etwas vorkommt, was nicht von jedem sogleich selbstthätig behandelt werden könnte, der die sphärische Trigonometrie und die beiden ersten Kapitel dieses Bandes, auf welche sie sich vorzüglich gründet, wohl verstanden und sich gehörig zu eigen gemacht hat.

Eine Anwendung, welche die Feldmeßkunst an die Hand giebt, mag hier jedoch noch besonders durchgeführt werden.

§. 217.

Man habe nämlich (Fig. 70.) einen Winkel gemessen $CJD = u^0$ in einer schiefen Ebene (wenn z. B. C eine Thurmspitze und D ein Signal auf einem Berge wäre, und man von der Ebene in J aus, den Winkel CJD mittelst eines dazu geeig-

neten Instrumentes bestimmt hätte) und zugleich die beiden Höhen-Winkel AJC$=p^0$ und BJD$=q^0$. Man soll den Winkel am Horizonte AJB$=x^0$ finden, welcher der auf den Horizont reducirte Winkel CJD ist.

Man hat hier ein körperliches Viereck, wo an der Kante AJ und auch an der Kante BJ rechte Winkel sind, in so fern die Ebenen CJA und DJB auf der Horizontal-Ebene AJB senkrecht angenommen sind. — Denkt man sich nun die Ebene CJB gelegt, so entstehen zwei Dreiecke, wovon das eine von den Kanten AJ, CJ und BJ gebildete, an der Kante AJ rechtwinklich ist. Wird daher in diesem letzteren die Hypothenuse CJB durch y^0 bezeichnet, so wie der zwischen y^0 und x liegende Winkel durch z^0, wo dann der zwischen y und q liegende Winkel $90^0 - z^0$ seyn wird, so hat man in dem rechtwinklichen Dreieck ACBJ (nach §. 214. N. 1.):

1) $\cos y = \cos p \cdot \cos x$

und

2) $\sin p = \sin y \cdot \sin z$.

In dem andern Dreiecke CBDJ dagegen hat man (nach §. 199.):

3) $\cos n = \cos y \cdot \cos q + \cos(90 - z) \cdot \sin y \cdot \sin q$

und aus diesen drei Gleichungen kann nun x und y, und auch z gefunden werden.

Eliminirt man erst y dadurch, daß man (aus 1.) $\cos y$, aus 2. dagegen $\sin y$ findet, und beide Werthe in 3. substituirt, so ergiebt sich

4) $\cos n = \cos p \cdot \cos q \cdot \cos x + \sin p \cdot \sin q$

und daraus

$$\cos x = \frac{\cos n - \sin p \cdot \sin q}{\cos p \cdot \cos q},$$

so daß also der Winkel x gefunden werden kann.

Um jedoch zur wirklichen numerischen Rechnung Logarithmen bequemer anwenden zu können, finde man lieber $\sin \frac{1}{2}x$. — Man hat aber

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}x = \frac{\cos(p-q) - \cos n}{\cos p \cdot \cos q};$$

aber

$$\cos(p-q) - \cos n = 2 \cdot \sin \tfrac{1}{2}(n+p-q) \cdot \sin \tfrac{1}{2}(n+q-p);$$

folglich

$$\sin \tfrac{1}{2}x = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(n+p-q) \cdot \sin \frac{1}{2}(n+q-p)}{\cos p \cdot \cos q}}\ *).$$

Man konnte dieselbe Aufgabe auch noch einfacher dadurch behandeln, daß man AZ auf den Horizont AJB senkrecht sich dachte. Dann hatte man im Dreieck CDZJ, die Seite CJZ $= 90^0 - p^0$, Seite DJZ $= 90^0 - q^0$ und Seite CJD $= n^0$. Berechnete man nun aus den drei Seiten dieses Dreieckes den Winkel an CZ, der auch dem an CA und CB rechtwinklichen Dreiecke ABZJ angehört, so konnte im letztern die dritte Seite AJB ohne weiteres berechnet werden.

Dieses Beispiel und der Weg der Behandlung desselben mag die Verfahrungsweise in ähnlichen Fällen im Wesentlichen durchschauen lassen; und wir werden daher hier nichts weiter mehr hinzufügen.

Uebungs-Beispiele.

1) Aus den gegebenen drei Seiten $a = 50^0$, $b = 70^0$ und $c = 100^0$, die Winkel α, β und γ zu finden? — Antw. $\alpha = 40^0\ 38'\ 38''$, $\beta = 53^0\ 2'\ 8''$ und $\gamma = 123^0\ 8'\ 11''$.

---

*) Man konnte auch $\cos \frac{1}{2}x$ finden, weil $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2}x$ ist; und dann konnte auch $tg \frac{1}{2}x$ gefunden werden, weil

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = tg^2 \tfrac{1}{2}x$$

ist; und jedesmal konnte mann den Werth dafür so umformen, daß sich Logarithmen bequem anwenden lassen, weil man immer auf bloße Summen oder Differenzen von Cosinus stößt, die leicht in Produkte verwandelt werden können, nach den (im II. Bd. §. 149.) aufgestellten Sätzen.

2) Aus zweien Seiten $a=50^\circ$ und $b=50^\circ$, nebst dem eingeschlossenen Winkel $\gamma=60^\circ$, die übrigen Seiten und Winkel zu finden? — Antw. $c=45^\circ\ 2'\ 57''$, $\beta=\alpha=69^\circ\ 38'\ 22''$.

3) Aus zweien Seiten $a=50^\circ$, $b=40^\circ$ und dem Winkel $\alpha=80^\circ$, die dritte Seite c des sphärischen Dreiecks zu finden? — Antw. $c=42^\circ\ 9'\ 21''$.

4) Aus zwei Winkeln $\beta=80^\circ$, $\gamma=120^\circ$ und der eingeschlossenen Seite $a=100^\circ$, den dritten Winkel des Dreiecks zu finden? — Antw. $\alpha=93^\circ\ 30'\ 50''$.

5) Aus den drei Winkeln $\alpha=220^\circ$, $\beta=130^\circ$ und $\gamma=150^\circ$ findet sich die Seite $a=123^\circ\ 8'\ 11\frac{1}{2}''$.

6) Im Dodekaëder den Neigungs-Winkel zu finden, welchen eine Kante mit dem ebenen Fünfeck bildet? — Antw. Solcher ist $121^\circ\ 43'\ 3''$.

7) Den Neigungs-Winkel zweier Ebenen eines Oktaëders zu finden? — Antw. Solcher ist $109^\circ\ 28'\ 43''$.

8) Den Neigungs-Winkel im Icosaëder zu finden? — Antw. Solcher ist $83^\circ\ 37'\ 14''$.

9) Sind in einem sphärischen Dreiecke die drei Seiten $a=51^\circ\ 41'\ 14''$, $b=70^\circ\ 20'\ 50'$ und $c=38^\circ\ 28'$ gegeben, so findet sich der Winkel $\alpha=52^\circ\ 30'$.

10) Ist aber $a=51^\circ\ 2'$; $b=73^\circ\ 58'\ 54''$; $c=38^\circ\ 45'$ gegeben, so findet sich $\alpha=46^\circ\ 33'\ 41''$.

11) Und ist $a=69^\circ\ 50'$; $b=109^\circ\ 39'\ 10''$ und $c=46^\circ\ 42'$, so wird $\alpha=32^\circ\ 54'\ 28''$ gefunden.

12) Aus den beiden gegebenen Seiten $b=70^\circ\ 20'\ 50''$, $c=38^\circ\ 28'$ und dem eingeschlossenen Winkel $\alpha=52^\circ\ 30'$, die beiden andern Winkel zu finden? — Antw. Es ist $\beta=107^\circ\ 47'\ 7''$ und $\gamma=38^\circ\ 58'\ 27''$.

13) Ist $b=73^\circ\ 58'\ 54''$, $c=38^\circ\ 45'$, $\alpha=46^\circ\ 33'\ 41''$ gegeben, so findet sich $\beta=115^\circ\ 9'\ 7''$ und $\gamma=35^\circ\ 46'\ 15''$.

14) Wäre dagegen gegeben $b=109^\circ\ 39'\ 10''$, $c=46^\circ\ 42'$ und $\alpha=32^\circ\ 54'\ 28''$, so fände sich $\beta=146^\circ\ 58'\ 9''$ und $\gamma=24^\circ\ 54'\ 47''$.

15) Aus den drei gegebenen Winkeln $\alpha=52\frac{1}{2}^\circ$, $\beta=107^\circ\ 47'\ 7''$ und $\gamma=38^\circ\ 58'\ 27''$ die Seite a zu finden? — Antw. $a=51^\circ\ 41'\ 14''$.

16) Aus $\alpha=46^\circ\ 33'\ 41''$, $\beta=115^\circ\ 9'\ 7''$ und $\gamma=35^\circ\ 46'\ 15''$ findet sich $a=51^\circ\ 2'$.

17) Ist gegeben $\alpha = 32^\circ\ 54'\ 28''$, $\beta = 146^\circ\ 58'\ 9''$ und $\gamma = 24^\circ\ 54'\ 47''$, so findet sich $a = 69^\circ\ 50'$.

18) Aus zwei gegebenen Winkeln $\beta = 107^\circ\ 47'\ 7''$, $\gamma = 38^\circ\ 58'\ 27''$ und der eingeschlossenen Seite $a = 51^\circ\ 41'\ 14''$, die beiden andern Seiten zu finden? — Antw. $b = 70^\circ\ 20'\ 50''$ und $c = 38^\circ\ 28'$.

19) Ist gegeben $\beta = 115^\circ\ 9'\ 7''$; $\gamma = 35^\circ\ 46'\ 15''$ und $a = 51^\circ\ 2'$, so findet sich $b = 73^\circ\ 58'\ 54''$ und $c = 38^\circ\ 45'$.

20) Und hat man $\beta = 146^\circ\ 58'\ 9''$, $\gamma = 42^\circ\ 54'\ 47''$ und $a = 69^\circ\ 50'$, so findet sich $b = 109^\circ\ 39'\ 10''$ und $c = 46^\circ\ 42'$.

Körperliche Geometrie.

Achtes Kapitel.

Die Elemente der Projektions-Lehre *).

§. 218. Erklärung.

Denkt man sich die gegenseitige Lage der Punkte, der Linien und der Flächen zu einander dadurch bestimmt, daß man ihre absolute Lage im Raume mittelst zwei auf einander senkrecht gedachten, übrigens unendlichen Ebenen MN und NP (Fig. 71.) festsetzt, so nennt man letztere zwei Ebenen MN und NP die coordinirten Ebenen, oder die Grund-Ebenen, auch die Projektions-Ebenen, und ihre gemeinschaftliche Durchschnitts-Linie NQ (die ebenfalls auf beiden Seiten mit den Ebenen zugleich in das Unendliche sich erstreckt) die Coordinaten-Axe, Projektions-Axe oder Axe schlechtweg. — Von diesen Grund-Ebenen nennen wir die eine MN die horizontale oder auch die erste, und bezeichnen sie immer durch G_1; die andere NP dagegen mag die vertikale oder die zweite heißen, und durchgehends durch G_2 vorgestellt wer-

*) Man wird dieses Kapitel nur dann gut und leicht auffassen, wenn man sich vorher mit den Sätzen des ersten Kapitels recht innig vertraut gemacht hat.

den, während die Axe allemal durch G_0 ausgedrückt seyn darf.

Anmerkung. Es ist nicht unwichtig zu bemerken, daß die beiden Grund-Ebenen sich eigentlich durch nichts von einander unterscheiden, daß daher, was in Bezug auf selbige gelehrt werden wird, allemal auch gilt, wenn man sie durchgehends beide mit einander vertauscht.

§. 219. Erklärung.

Unter Projektion eines im Raume beliebig genommenen Punktes A (Fig. 71.) versteht man die Punkte A_1 oder A_2, wo die von A aus auf die Grund-Ebenen MN oder G_1 und NP oder G_2 gedachten senkrechten Linien AA_1 und AA_2 diese Grund-Ebenen treffen; und zwar nennt man A_1 die erste oder Horizontal-Projektion, A_2 dagegen die zweite oder die Vertikal-Projektion *).

Von jedem beliebigen Punkte B im Raume bezeichnen wir ein für allemal seine Projektionen durch B_1 und B_2, dergestalt, daß B_1 die horizontale, B_2 dagegen die vertikale vorstellt.

Die Linien AA_1 und AA_2 werden die Coordinaten des Punktes A oder die projicirenden Linien genannt, und zwar AA_1 die erste oder die horizontal projicirende, AA_2 dagegen die zweite oder die vertikal projicirende. Jede einzelne dieser Linien heißt auch die Ordinate.

§. 220. Zusätze.

1) Denkt man sich von A_1 auf die Axe NQ (Fig. 71.) eine gerade Linie A_1A_0 senkrecht gezogen und dann die gerade A_0A_2, so bilden $A_0A_1AA_2$ ein Rechteck (rechtwinkliches Parallelogramm), und es ist

$$AA_1 = A_0A_2 \quad \text{und} \quad AA_2 = A_0A_1.$$

---

*) Man könnte auch die erstere A_1 den Grundriß, die andere A_2 dagegen den Aufriß des Punktes A nennen.

Denn die Ebene A_1AA_2 steht (nach §. 35.) senkrecht auf jeder der Grund-Ebenen, also auch senkrecht auf der Axe NQ (§. 38.); also ist auch W. NA_0A_2 ein rechter und deshalb auch (nach §. 26.), $A_1A_0A_2$ ein rechter Winkel.

2) Zieht man also von jeder der Projektionen A_1 und A_2, senkrechte Linien auf die Axe NQ, so müssen beide in demselben Punkte A_0 zusammentreffen. — Und zieht man bloß A_1A_0 auf die Axe senkrecht und dann von A_0 aus noch eine senkrechte auf die Axe in der zweiten Grund-Ebene, so muß letztere durch den Punkt A_2 hindurchgehen.

3) Denkt man sich daher die beiden coordinirten Ebenen so aufgeklappt, daß sie neben einander in derselben Ebene zu liegen kommen, wie solches (Fig. 72.) zu sehen, so muß die gerade, durch die Projektion A_1 und A_2 gezogene Linie A_1A_2 nothwendig auf der Axe NQ senkrecht stehen; und die auf die Axe senkrechte A_1A_0, gehörig verlängert, muß auch durch den Punkt A_2 hindurchgehen.

4) Durch die beiden Projektionen A_1 und A_2 (Fig. 71.) ist der Punkt A im Raume völlig bestimmt.

Denn von jeder Projektion kann auf die coordinirte Ebene (Grund-Ebene), in welcher er liegt, nur eine senkrechte Linie errichtet werden und diese beiden Ordinaten-Richtungen müssen sich, und können sich nur, in einem einzigen Punkte schneiden.

5) Durch die Projektionen zweier Punkte A und B ist daher die gerade Linie AB ganz und vollkommen bestimmt, so wohl ihrer Lage als Länge nach.

6) Eine Ebene dagegen ist ihrer Lage nach im Raume völlig bestimmt und gegeben, so oft von dreien ihrer Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, die Projektionen gegeben sind.

7) Liegt der Punkt A in der ersten Grund-Ebene G_1 selbst, so fällt er mit A_1 zusammen, und A_2 fällt dann in die Axe und mit A_0 zusammen. — Aehnliches gilt in Bezug auf die andere Grund-Ebene G_2.

8) Liegt der Punkt A in der Axe, so fällt er mit seinen beiden Projektionen in A_0 zusammen.

9) Jede der projicirenden Linien eines Punktes läuft mit der andern Grund-Ebene parallel; z. B. AA_1 mit der Vertikal-Ebene G_2, und AA_2 mit der Horizontal-Ebene G_1.

§. 221. Erklärung.

Denkt man sich eine (gerade oder krumme) Linie beliebig im Raume, so werden die Projektionen ihrer einzelnen Punkte eben so stetig, wie diese Punkte selbst, neben einander liegen und Projektionen der Linie bilden, von denen wiederum die eine die erste oder die horizontale, die andere dagegen die zweite oder die vertikale genannt wird.

Desgleichen werden die projicirenden Linien stetig an einander liegen und entweder eine Ebene oder eine krumme Fläche (eine Cylinder-Fläche, im allgemeinsten Sinne des Wortes §. 114. Anmerk.) bilden, und diese mögen die projicirenden Ebenen oder die projicirenden Flächen heißen und wiederum durch den Namen der ersten oder der horizontal projicirenden und der zweiten oder der vertikal projicirenden von einander unterschieden werden.

§. 222. Zusätze.

1) Die Projektionen einer geraden Linie AB sind selber gerade Linien A_1B_1 und A_2B_2, und ihre projicirenden Flächen ABA_1B_1 und ABA_2B_2 sind Ebenen.

Denn die projicirenden Linien der einzelnen Punkte von AB liegen alle in der durch die gerade Linie AB und durch eine derselben gegebenen Ebene, weil sie alle mit einander parallel seyn müssen.

2) Die Projektion einer krummen Linie im Raume kann auch eine gerade Linie werden und wird solche allemal, so oft alle Punkte der gegebenen krummen Linie in einer und derselben, auf der Grund-Ebene senkrechten Ebene liegen.

Note. Alle krumme oder gerade Linien, welche in einer Ebene liegen, die auf irgend einer der Grund-Ebenen senkrecht steht, haben in Bezug auf diese Grund-Ebene einerlei Projektion, nämlich immer die Durchschnitts-Linie der Grund-Ebene mit dieser auf ihr senkrechten Ebene.

3) Beide Projektions-Linien einer krummen Linien können nie zugleich gerade werden.

Denn dann würden beide projicirende Flächen Ebenen seyn und diese Ebenen sich in der gegebenen krummen Linie schneiden, was nicht möglich ist.

4) Eine Linie ist durch ihre beiden Projektions-Linien völlig bestimmt.

Denn es ist jeder einzelne Punkt **A** (Fig. 71.) dadurch völlig bestimmt, daß man von einem beliebigen Punkte A_1 der ersten Projektions-Linie, auf die Axe die senkrechte A_1A_0 zieht, dann von A_0 aus auf die Axe in der zweiten coordinirten Ebene eine neue senkrechte Linie A_0A_2 errichtet und solche verlängert, bis sie die zweite Projektions-Linie in A_2 trifft, während A_2 die zweite Projektion des Punktes **A** vorstellt (nach §. 220.).

Note. Die Lage einer Linie im Raume läßt sich daher am einfachsten durch ihre beiden Projektions-Linien angeben.

5) Die Projektion einer geraden Linie **AB** kann auch bloß ein Punkt seyn und ist dies allemal, so oft die Richtung von **AB** auf der Grund-Ebene senkrecht steht.

6) Jede der projicirenden Ebenen einer geraden Linie **AB**, z. B. die erste ABA_1B_1, schneidet die andere der Grund-Ebenen, d. h. die zweite G_2, allemal in einer, auf der Axe G_0 und auf der ersten Grund-Ebene G_1 senkrechten geraden Linie.

Denn die erste projicirende Ebene ABA_1B_1 und die zweite Grund-Ebene G_2 stehen zugleich auf der ersten Grund-Ebene G_1 senkrecht; also steht auch ihre Durchschnitts-Linie auf der ersten Grund-Ebene, und auch auf der Axe G_0 (und auch auf der ersten Projektion, so wie auf jeder Linie in der ersten Grund-Ebene, die durch denselben Punkt gezogen ist) senkrecht (nach §. 38.).

Note. Eben so schneidet die zweite projicirende Ebene einer geraden Linie **AB**, die erste Grund-Ebene G_1 in einer Linie, welche auf der zweiten Grund-Ebene, also auch auf der Axe und auf der zweiten Projektions-Linie A_2B_2 senkrecht steht.

7) Läuft die gerade Linie AB mit der ersten Grund-Ebene G_1 parallel, so läuft ihre erste Projektions-Linie A_1B_1 mit ihr selber parallel und ihre zweite projicirende Ebene ABA_2B_2 mit der ersten Grund-Ebene G_1 ebenfalls parallel, und die zweite Projektions-Linie A_2B_2 auch mit der Axe G_0 parallel. — Dasselbe gilt natürlich, wie immer, auch dann noch, wenn in dieser Aussage die Grund-Ebenen mit einander vertauscht werden.

Denn es laufen **AB** und AA_2 mit der ersten Grund-Ebene parallel, also auch die durch sie gebildete Ebene, d. h. die zweite projicirende Ebene ABA_2B_2 mit der ersten Grund-Ebene parallel (nach §. 46.); und zwei parallele Ebenen, nämlich hier die erste Grund-Ebene G_1 und die zweite projicirende Ebene ABA_2B_2 werden von einer dritten, nämlich der zweiten Grund-Ebene G_2 in parallelen Linien, nämlich in A_2B_2 und in der Axe G_0, geschnitten.

8) Umgekehrt: läuft die eine Projektions-Linie A_1B_1 einer geraden Linie AB mit der Axe parallel, so läuft auch die Linie AB selbst mit der andern Grund-Ebene parallel.

9) Laufen beide Projektions-Linien einer geraden Linie AB mit der Axe parallel, so läuft sie selber mit der Axe parallel.

Denn es laufen dann die projicirenden Ebenen mit den Grund-Ebenen parallel, weil sie paarweise von der dritten in parallelen Durchschnitts-Linien getroffen werden und rechte Winkel bilden (§§. 57.—60.); daher ist dann auch die Durchschnitts-Linie **AB** der projicirenden Ebenen mit jeder der Grund-Ebenen parallel (nach §. 42.), also auch parallel mit ihren beiden Projektionen und deshalb dann auch mit der Axe.

10) Im Allgemeinen bildet eine gerade Linie AB mit ihrer Projektion A_1B_1 und ihren Ordinaten AA_1 und BB_1 ein Trapez, und denkt man sich, im Falle $AA_1 > BB_1$, durch B mit A_1B_1 eine parallele Linie BD gezogen, so bildet solche (die $= A_1B_1$ ist) mit AB und mit der Differenz der Coordinaten $AA_1 - BB_1$ ein rechtwinkliches Dreieck, so daß man allemal hat

$$AB^2 = A_1B_1{}^2 + (AA_1 - BB_1)^2.$$

§. 223. Lehrsätze.

1) Schneiden sich zwei Linien AB und CD im Raume in einem Punkte E, so schneiden sich auch ihre Projektionen, nämlich A_1B_1 und C_1D_1 in E_1, und A_2B_2 und C_2D_2 in E_2, wo E_1 und E_2 die Projektionen des Punktes E vorstellen.

2) Sind dagegen AB und CD im Raume mit einander parallel, so sind auch ihre Projektionen A_1B_1 und C_1D_1, so wie noch A_2B_2 und C_2D_2 mit einander parallel.

Beweis. Der erste Satz fällt in die Augen. Der zweite beweist sich wie folgt: Die beiden projicirenden Ebenen ABA_1B_1 und CDC_1D_1 sind mit einander parallel, weil sie von zwei Paaren paralleler Linien AB und CD, desgleichen AA_1 und CC_1 gebildet werden (§. 46.). Sie werden daher von der ersten Grund-Ebene in parallelen Durchschnitts-Linien A_1B_1 und C_1D_1 geschnitten (§. 42. N. 1.). Daher diese Projektionen mit einander parallel. — Dasselbe gilt dann auch von den Projektionen A_2B_2 und C_2D_2.

§. 224. Zusätze.

1) Sind von zwei Geraden AB und CD im Raume, die ersten Projektionen A_1B_1 und C_1D_1 mit einander parallel, während die zweiten Projektionen A_2B_2 und C_2D_2 sich schneiden, so werden die Linien AB und CD nicht mit einander parallel seyn und auch sich nicht schneiden, — also nicht in einer und derselben Ebene liegen.

2) Sind aber beide Paare Projektionen mit einander parallel, A_1B_1 mit C_1D_1 und auch A_2B_2 mit C_2D_2, so sind AB und CD selbst mit einander parallel.

Denn es sind dann die projicirenden Ebenen ABA_1B_1 und CDC_1D_1, desgleichen ABA_2B_2 und CDC_2D_2 mit einander parallel, weil sie von den Grund-Ebenen in parallelen Durchschnitts-Linien geschnitten werden, und senkrecht auf ihnen stehen (§. 57.). Diese vier projicirenden Ebenen schneiden sich daher in vier Linien, darunter AB und CD, und diese letztern müssen nun deshalb parallel seyn, weil sie beide mit einer der übrigen beiden parallel sind.

3) Schneiden sich dagegen die beiden Projektionslinien A_1B_1 und C_1D_1 in einem Punkte X_1 und zu gleicher Zeit die beiden andern Projektionen A_2B_2 und C_2D_2 in einem Punkte Y_2, so werden AB und CD selbst sich nur dann schneiden, wenn die von X_1 und Y_2 auf die Axe gefällten senkrechten Linien, mit der Axe in einem und demselben Punkte zusammentreffen. — Treffen aber diese von X_1 und Y_2 auf die Axe gefällten senkrechten Linien nicht in der Axe mit einander zusammen, so liegen AB und CD nicht in einer und derselben Ebene.

Denn es kann (nach §. 223. N. 2.) unter diesen Voraussetzungen AB mit CD nicht parallel seyn. Und schnitten sich AB und CD in einem Punkte E, so schnitten sich ihre Projektionen in den Projektions-Punkten E_1 und E_2, so daß dann X_1 mit E_1 und Y_2 mit E_2 zusammenfallen müßte, während auch die von E_1 uud E_2, d. h. von X_1 und Y_2 auf die Axe gefällten senkrechten Linien in E_0 zusammentreffen müßten (nach §. 220. N. 2.).

§. 225. Erklärung.

Schneidet eine Ebene P im Raume, eine der Grund-Ebenen oder alle beide, so nennt man die Durchschnittslinien **Grundschnitte** (bases, traces), welche wiederum durch die Namen des **ersten** oder **horizontalen** und des **zweiten** oder **vertikalen** von einander unterschieden werden. Und wird die Ebene durch einen einzigen Buchstaben, z. B. P ausgedrückt, so soll P′ allemal ihren **ersten** Grundschnitt, P″ dagegen ihren **zweiten** vorstellen.

Ist bloß eine gerade Linie a im Raume gegeben, welche verlängert die Grund-Ebenen G_1 und G_2 in den Punkten a′ und a″ trifft, so mögen auch die Punkte a′ und a″ die **Grundschnitte** der Linie a heißen. Und es mag eine Ebene P oder eine Linie a die Grund-Ebenen G_1 und G_2 treffen, so bildet P oder a mit G_1 und mit G_2 Neigungs-Winkel oder Winkel, und diese sollen die **Grund-Winkel** genannt werden.

Anmerkung 1. Die Definition des Grundschnitts kann man auch auf den Fall ausdehnen, wo die Grund-Ebenen statt

von der Ebene P, von einer krummen Fläche geschnitten werden sollten (z. B. etwa von einer Kugelfläche, oder von einer Cylinder- oder Kegel-Fläche), oder statt von der geraden Linie a, von einer krummen Linie.

Anmerkung 2. Liegt eine Linie a in einer Ebene oder ganz in einer beliebigen Fläche P, so liegt der Grundschnitt a′ nothwendig in dem Grundschnitte P′, und eben so liegt dann a″ nothwendig in P″.

§. 226. Zusätze.

1) Bildet eine Ebene P oder eine gerade Linie a nur einen Grundschnitt P′ oder a′, so läuft sie mit der andern Grund-Ebene G_2 parallel.

Denn liefe sie nicht mit ihr parallel, so bildete sie mit ihr irgendwo den zweiten Grundschnitt.

2) Umgekehrt: läuft eine Ebene P oder eine Gerade a mit einer der Grund-Ebenen G_2 parallel, so bildet sie bloß mit der andern Grund-Ebene G_1 einen Grundschnitt, P′ oder a′, und der erstere, nämlich P′ muß mit der Axe G_0 parallel seyn.

Denn schnitte er die Axe G_0, so hätte die Ebene P diesen Durchschnittspunkt auch mit der ihr parallelen Grund-Ebene G_2 gemein, was gegen den Begriff paralleler Ebenen ist.

3) Schneidet die Ebene P dagegen beide Grund-Ebenen, G_1 und G_2, so können in Absicht auf die Axe und die beiden Grundschnitte P′ und P″ folgende Fälle statt finden:

A) entweder P′, P″ und die Axe G_0 fallen alle drei in eine und dieselbe Linie zusammen; dann geht die Ebene P durch die Axe G_0 hindurch und ist durch Angabe dieser Eigenschaft ihrer Lage nach noch nicht völlig bestimmt; oder

B) alle drei Linien, P′ P″ und G_0 sind von einander verschieden (so daß es nicht möglich ist, daß einer der Grundschnitte mit der Axe zusammenfiele, während der andere nicht mit ihr zusammenfällt, auch nicht möglich, daß die beiden Grundschnitte

in eine und dieselbe Linie zusammenfielen, ohne daß solche zugleich auch die Axe wäre). — In diesem letztern Falle ist wiederum nur möglich:

a) entweder die beiden Grundschnitte P′, P″ und die Axe G_0 laufen alle drei in einem und demselben Punkte zusammen, d. h. die beiden Grundschnitte P′ und P″ schneiden sich in der Axe G_0, und in diesem Falle bestimmen die Grundschnitte P′ und P″ die Lage der Ebene vollkommen; oder

b) die beiden Grundschnitte P′ und P″ laufen beide mit der Axe G_0 parallel (so daß es nicht möglich ist, daß z. B. P′ mit der Axe parallel laufen könnte, während P″ die Axe schneidet), und sind dann auch unter sich parallel; und in diesem Falle ist durch Angabe der Grundschnitte P′ und P″ wiederum ihre Lage völlig bestimmt.

Denn die Ebene P und die beiden Grund-Ebenen G_1 und G_2 bilden drei sich schneidende Ebenen, von denen P′, P″ und G_0 die Durchschnittslinien sind; also gilt alles, was für diesen Fall bereits §. 62. entwickelt worden, auch hier; und daß zwei sich schneidende oder zwei mit einander parallele Linien P′ und P″ die Lage einer Ebene völlig bestimmen, erleidet keinen Zweifel.

4) Steht einer der Grundschnitte P′ senkrecht auf der Axe G_0, also auch senkrecht auf der zweiten Grund-Ebene G_2 (nach §. 36.), so steht die Ebene P selber auf dieser Grund-Ebene G_2 senkrecht (nach §. 35.).

5) Umgekehrt: steht die Ebene P auf einer der Grund-Ebenen, z. B. G_2 senkrecht, so steht der erste Grundschnitt P′ auf der Axe und auch auf G_2 senkrecht.

Denn es stehen P und G_1, also auch ihre Durchschnittslinie P′ auf G_2 senkrecht (§. 38.).

Note. Dies ist allemal der Fall, so oft P eine der projicirenden Ebenen, — z. B. ABA_2B_2 einer geraden AB, vorstellt (vergl. §. 222. N. 6.).

6) Stehen beide Grundschnitte P′ und P″ zugleich senkrecht auf der Axe, so steht auch P selbst senkrecht auf der Axe

(nach §. 3.), und natürlich dann auch (nach §. 35.) senkrecht auf jeder der Grund-Ebenen.

§. 227. Lehrsatz.

Steht eine Linie AB im Raume auf einer Ebene P im Raume senkrecht, so steht auch ihre erste Projektion A_1B_1 auf dem ersten Grundschnitte P′ senkrecht. Und eben so steht dann auch A_2B_2 auf P″ senkrecht.

Beweis. Denn da **AB** auf der Ebene **P** senkrecht steht, so steht auch die durch **AB** gelegte projicirende Ebene ABA_1B_1 auf **P** senkrecht (§. 35.), während sie auch auf der Grund-Ebene G_1 senkrecht steht. Es steht also **P** und auch G_1 auf ABA_1B_1 senkrecht, daher auch die Durchschnittslinie beider erstern, nämlich P′, auf ABA_1B_1 senkrecht (nach §. 38.), und daher auch senkrecht auf der in dieser Ebene liegenden und durch P′ hindurchgehenden *) A_1B_1, so wie auch noch senkrecht auf der Durchschnittslinie der ABA_1B_1 mit der Ebene **P**.

§. 228. Zusatz.

Umgekehrt: Stehen die beiden Projektionen A_1B_1 und A_2B_2 bezüglich auf den Grundschnitten P′ und P″ senkrecht, so steht die Linie AB selbst auf P senkrecht.

Denn die Ebenen ABA_1B_1 und G_1 stehen auf einander senkrecht; und da P′ in G_1 auf A_1B_1 senkrecht steht, so steht P′ auf der ganzen Ebene ABA_1B_1 senkrecht (§. 36.), und daher auch die durch P′ gehende Ebene **P** auf ABA_1B_1 senkrecht. Aus denselben Gründen steht auch **P** auf ABA_2B_2 senkrecht; also **P** auch senkrecht auf der Durchschnittslinie **AB** der beiden Ebenen ABA_1B_1 und ABA_2B_2.

Anmerkung. Steht daher eine Linie AB schief auf einer Ebene P, so kann zwar eine Projektion A_1B_1 auf dem Grund-

---

*) Die Linien A_1B_1 und P′ müssen sich deshalb treffen, weil die Ebenen **P**, G_1 und ABA_1B_1 sich wechselseitig schneiden, ihre drei Durchschnittslinien also, darunter P′ und A_1B_1, in einem Punkte zusammenlaufen. — Denn wären sie mit einander parallel, so würden, weil G_1 auf **P** und auch auf ABA_1B_1 senkrecht steht, (nach §. 57.) die beiden Ebenen **P** und ABA_1B_1 mit einander parallel laufen müssen, was gegen die Voraussetzung ist.

schnitte P′ senkrecht stehen, aber nicht zugleich auch A_2B_2 auf P″.

§. 229. Lehrsatz.

Sind zwei Ebenen P und Q mit einander parallel, so sind auch ihre Grundschnitte P′ und Q′, desgleichen P″ und Q″ mit einander parallel.

Beweis. Denn es werden parallele Ebenen P und Q von jeder dritten, z. B. G_1, in parallelen Durchschnittslinien geschnitten.

§. 230. Zusatz.

Umgekehrt: Sind die Grundschnitte P′ und Q′ und zu gleicher Zeit die Grundschnitte P″ und Q″ mit einander parallel, so sind die Ebenen P und Q selber mit einander parallel, wenn nur die Grundschnitte nicht mit der Axe parallel sind.

Denn dann sind die Ebenen P und Q von Winkeln gebildet, welche parallele Schenkel haben (§. 46.).

Anmerkung. Sind aber zwar P′ und Q′, desgleichen P″ und Q″ mit einander, dagegen auch zugleich mit der Axe parallel, so sind die Ebenen P und Q selbst mit einander nicht nothwendig parallel, sondern sie können sich auch schneiden, in einer mit der Axe, also dann auch mit allen Grundschnitten parallelen Linie.

Es kann dies auch noch näher bestimmt werden. Fällt man nämlich aus einem beliebigen Punkte X der Axe eine Linie senkrecht auf die Grundschnitte, welche P′ und Q′ in p′ und q′ trifft; und eine zweite senkrechte Linie auf P″ und Q″, welche letztere in p″ und q″ treffen mag, so bilden Xp′p″ und Xq′q″ Dreiecke. Ist in diesen

$$Xp' : Xp'' = Xq' : Xq'',$$

so läuft p′p″ mit q′q″ parallel und dann laufen die Ebenen P und Q nothwendig selber mit einander parallel, weil sie dann

zwei Paare sich schneidende paralle Linien enthalten (§. 46.). Findet aber die gedachte Proportion nicht statt, so sind auch die Ebenen nicht parallel.

§. 231. Zusatz.

Sind daher von zwei Ebenen P und Q, die Grundschnitte P′ und Q′ mit einander parallel, während die zweiten Grundschnitte P″ und Q″ sich schneiden, so schneiden sich die Ebenen P und Q einander und zwar in einer Linie, welche mit P′ und Q′ parallel ist, dagegen durch den Durchschnittspunkt (P. P″, Q″) hindurchgeht.

Denn da P, Q und G_1 sich wechselseitig schneiden (solches folgt indirekt aus §. 229.) und zwei der Durchschnittslinien P′ und Q′ parallel sind, so ist auch die dritte mit diesen beiden parallel. Und da auch P, Q und G_2 sich wechselseitig schneiden, und zwei der Durchschnittslinien, nämlich P″ und Q″ sich schneiden, so geht die dritte durch denselben Punkt hindurch; alles (nach §. 62.).

§. 232. Zusatz.

Schneiden sich beide Paare Grundschnitte, nämlich P′ und Q′, desgleichen P″ und Q″, so schneiden sich auch die Ebenen P und Q selbst in einer Linie, welche durch die Punkte (P. P′, Q′) und (P. P″, Q″) hindurchgeht.

Denn daß sich die Ebenen schneiden, folgt rein indirekt aus §. 229. Um aber zu wissen, wo sie sich schneiden, darf man nur bedenken, daß P, Q und G_1 sich wechselseitig schneiden, und daß also die drei Durchschnittslinien in einem Punkte (P. P′, Q′) zusammentreffen müssen, in welchem zwei derselben, nämlich P′ und Q′ sich schneiden. Dasselbe gilt auch in Bezug auf die andere Grund-Ebene.

Note. Hat man also die Durchschnitts-Punkte der Grundschnitte (P. P′, Q′) und (P. P″, Q″), so sind dies zugleich zwei Punkte der Durchschnittsline L. (P, Q) der beiden Ebenen P und Q.

§. 233. Erklärung.

Wird der Umfang einer völlig begrenzten ebenen Figur F projicirt, so bilden die Projektionen abermals eine ebene Figur

F_1, den Fall ausgenommen, wenn die Ebene von F auf der Grund-Ebene senkrecht stehen sollte. Diese neue begrenzte Figur F_1 mag die Projektion der Figur F genannt werden.

§. 234. Lehrsatz.

Ist ABC ein beliebiges Dreieck, dessen Ebene mit der Grund-Ebene G_1 den Winkel α bildet, so ist, wenn $A_1B_1C_1$ seine Projektion auf G_1 vorstellt, und wenn F und F_1 die Inhalte der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ausdrücken, allemal

$$F_1 = F \cdot \cos\alpha.$$

Beweis. Denn es sey (Fig. 73.) $\mathfrak{AB}$ die Durchschnittslinie der Ebene ABC mit der Grund-Ebene G_1, und von A, B, C aus seyen auf $\mathfrak{AB}$ die senkrechten $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ und dann $A_1\mathfrak{A}$, $B_1\mathfrak{B}$, $C_1\mathfrak{C}$ gezogen, so müssen diese letztern ebenfalls auf der Kante $\mathfrak{AB}$ senkrecht stehen, und man hat $\alpha = \mathfrak{W}.\, A\mathfrak{A}A_1 = \mathfrak{W}.\, B\mathfrak{B}B_1 = \mathfrak{W}.\, C\mathfrak{C}C_1$. Ferner denke man sich die $A\mathfrak{A}$ verlängert bis D und von B aus die Linien BEF in der Ebene ABC parallel mit $B\mathfrak{C}$, also senkrecht auf AD gezogen, und $B_1E_1F_1$ sey die Projektion der letztern, also auch parallel mit $B\mathfrak{AC}$, so ist nun $BE = B\mathfrak{A} = B_1E_1$ die gemeinschaftliche Höhe der Dreiecke ABD und $A_1B_1D_1$; daher verhalten sich letztere wie ihre Grundlinien AD und A_1D_1. Aber dasselbe gilt von den Dreiecken ADC und $A_1D_1C_1$, so daß man hat

$$ABD : A_1B_1D_1 = ADC : A_1D_1C_1 = AD : A_1D_1,$$

also auch $ABD + ADC : A_1B_1D_1 + A_1D_1C_1 = AD : A_1D_1$

oder 1) $\triangle ABC : \triangle A_1B_1C_1 = AD : A_1D_1$.

Nun ist aber

$$\mathfrak{A}D \cdot \cos\alpha = \mathfrak{A}D_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}A \cdot \cos\alpha = \mathfrak{A}A_1,$$

also, wenn man letztere Gleichung von ersterer subtrahirt:

2) $AD \cdot \cos\alpha = A_1D_1$ oder $AD : A_1D_1 = 1 : \cos\alpha$.

Folglich, wenn man 1. und 2. mit einander durch Elimination von $AD : A_1D_1$ verbindet:

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC \cdot \cos\alpha.$$

§. 235. Zusatz.

Ist daher F eine beliebige ebene Figur, F_1 ihre Projektion auf G_1, und bildet die Ebene F mit der Grund-Ebene G_1 den Grund-Winkel α, so hat man allemal noch

$$F_1 = F \cdot \cos\alpha.$$

Denn die Figur F kann durch Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegt werden.

Amerkung. Ein ähnlicher Satz gilt schon von der Linie AB. Wenn AB mit seiner Projektion A_1B_1 den Grund-Winkel α bildet, so ist allemal

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos\alpha.$$

Schluß-Anmerkung.

Statt daß wir hier durchaus Grund-Ebenen angenommen haben, welche senkrecht auf einander stehen, konnte man sich auch solche Projektions-Ebenen denken, welche einen beliebigen Winkel φ mit einander bilden, und konnte die projicirenden Linien dann parallel mit den Grund-Ebenen nehmen. Punkte und Linien und ebene Figuren wären dann noch immer durch ihre Projektionen bestimmt und gegeben gewesen, und viele der hier vorgetragenen Sätze würden unverändert, viele aber mit mehr oder weniger Veränderung statt finden.

Wir lassen uns jedoch hier auf diese Untersuchungen nicht weiter ein, weil solche nicht geeignet sind, unsern gegenwärtigen Zweck zu fördern.

Körperliche Geometrie.

Neuntes Kapitel.

Etwas vollständigere Coordinaten-Theorie.

§. 236. Erklärung.

Setzt man die Lage eines Punktes P (Fig. 74.) in einer Ebene dadurch fest, daß man seine beiden senkrechten Abstände PQ und PR von zwei sich senkrecht schneidenden Linien AX und AY angiebt, so sagt man: der Punkt sey in der Ebene durch seine Coordinaten gegeben. Dabei wird RP oder AQ die Abscisse, PQ dagegen seine Ordinate genannt. Die unbegrenzten Linien AX und AY heißen die Axen oder Grundlinien und zwar AX die Abscissen-Axe, AY die Ordinaten-Axe. Der Punkt A heißt der Anfangs-Punkt der Coordinaten, und die Punkte Q und R, werden auch die Projektionen des Punktes P genannt, auf die Axen AX und AY genommen.

Weil aber durch die Angabe der Coordinaten eigentlich vier Punkte gegeben sind P_1, P_2, P_3, P_4, welche alle vier dieselben Coordinaten a und b haben (wo $AQ = AQ_1 = a$ und $P_1Q = P_3Q = P_2Q_1 = P_4Q_1 = b$ seyn soll, wo also a und b absolute, nicht positive und nicht negative, ganze oder gebro-

chene Zahlen sind), so drücken wir, daß der Punkt P oberhalb oder unterhalb der Abscissen-Axe AX liegt, dadurch aus, daß wir seiner Ordinate b im ersten Falle das (+), im andern Falle das (—) Zeichen vorsetzen; und, daß der Punkt P rechts oder links der Ordinaten-Axe liegt, drücken wir dadurch aus, daß wir seiner Abscisse a das (+) oder das (—) Zeichen vorsetzen. — Diese dadurch entstehenden positiven oder negativen Zahlen $+a$, $-a$, $+b$, $-b$, nennen wir aber die Coordinaten-Werthe, während a und b selbst die Coordinaten schlechthin, oder, in so fern sie Zahlen vorstellen, die Coordinaten-Maaße genannt werden.

Anmerkung. Die Coordinaten P_1Q, P_3Q, P_2Q_1, P_4Q_1 und AQ, AQ_1 sind daher allemal absolute (nicht positive und nicht negative) Linien, und die Coordinaten-Maaße a und b ebenfalls absolute (nicht positive und nicht negative) Zahlen; und nur die Coordinaten-Werthe sind positive oder negative Zahlen $+a$, $-a$, $+b$, $-b$; wozu auch noch die Null gerechnet wird, im Falle der Punkt P in einer der Axen selber liegen sollte.

§. 237. Zusatz.

Ein Punkt P in einer Ebene ist daher durch seine Coordinaten selbst noch nicht völlig gegeben, wohl aber durch seine Coordinaten-Werthe, weil letztere zugleich die Region festsetzen, in welcher er liegt.

§. 238. Lehrsatz.

I. Ist CD eine Linie in der Ebene XAY (Fig. 75.), welche mit der Axe AX den Winkel α, mit der Axe AY dagegen den Winkel β bildet, so hat man allemal

$$1)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

II. Und sind C_1, C_2 die Projektionen des Punktes C und D_1 und D_2 die Projektionen des Punktes D, auf die Axen AX

und AY, so ist auch noch:

$$2)\ (CD)^2 = (C_1D_1)^2 + (C_2D_2)^2.$$

Beweise. Denn verlängert man CC_2 bis E, so ist W. $DCE = \alpha$ und W. $CDE = \beta$, und

$$\cos\alpha = \frac{CE}{CD}, \qquad \cos\beta = \frac{DE}{CD}$$

und $$CD^2 = CE^2 + DE^2;$$

daher fallen die beiden Sätze in die Augen.

Anmerkung. Zugleich erhellet, daß die Projektionen C_1D_1 und C_2D_2 von CD, bezüglich $CD \cdot \cos\alpha$ und $CD \cdot \cos\beta$ sind.

§. 239. Zusatz.

Werden daher die Coordinaten von C durch a und b, die von D dagegen durch c und d vorgestellt, so hat man:

$$CD = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}.$$

Anmerkung. Diese Gleichungen gelten auch noch, wenn die Punkte C und D so liegen, daß ihre Coordinaten-Werthe beliebig positiv oder negativ werden, wenn nur a, b, c, d nicht die Maaße, sondern die Werthe der Coordinaten vorstellen; wie solches einfach und strenge erwiesen werden kann, hier aber nur historisch bemerkt werden soll.

§. 240. Zusatz.

Und sind x und y die Coordinaten-Werthe eines Punktes C in der Ebene, so ist allemal

$$AC^2 = x^2 + y^2$$

oder $$AC = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

§. 241. Lehrsatz.

Sind AX und AY (Fig. 76.) Coordinaten-Axen und CD und CE zwei beliebige Linien, so daß CD und CE mit der Richtung AX die Winkel α und α_1, mit der Richtung AY dagegen die Winkel β und β_1 machen, und wird der Winkel ECD durch ψ bezeichnet, so ist allemal

$$\cos\psi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1.$$

Beweis. Es seyen

c, c_1 die Coordinaten-Werthe des Punktes C
d, d_1 = = = = D
e, e_1 = = = = E,

so ist (nach §. 239.):

$$1)\ CD = \sqrt{(d-c)^2 + (d_1-c_1)^2}$$

$$2)\ CE = \sqrt{(e-c)^2 + (e_1-c_1)^2}$$

und

$$3)\ DE = \sqrt{(e-d)^2 + (e_1-d_1)^2}$$

und dabei (nach II. Bd. S. 309.)

$$4)\ \cos\psi = \frac{CD^2 + CE^2 - DE^2}{2\,CD \cdot CE}.$$

Substituirt man nun die Werthe (aus 1.—3. in 4.), so ergiebt sich:

$$5)\ \cos\psi = \frac{(d-c)(e-c) + (d-c_1)(e_1-c_1)}{CD \cdot CE}.$$

Nun ist aber (nach §. 238. Anmerk.):

$$d-c = CD \cdot \cos\alpha, \qquad d_1-c_1 = CD \cdot \cos\beta,$$
$$e-c = CE \cdot \cos\alpha_1 \quad \text{und} \quad e_1-c_1 = CE \cdot \cos\beta_1;$$

folglich, wenn diese Werthe in 5. substituirt werden:

$$6)\ \cos\psi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1.$$

Note. Es wäre leichter geworden, dasselbe Resultat zu erhalten, wenn man lieber CZ und CV parallel mit AX und AY gezogen hätte, und die Gleichungen bemerkt:

$$1)\ \alpha+\beta = 90^\circ, \qquad 2)\ \alpha_1+\beta_1 = 90^\circ,$$
$$3)\ \psi = 90^\circ-\alpha-\beta_1 = \alpha_1-\alpha = \beta-\beta_1,$$

und nun (nach II. Bd. §. 147.) genommen hätte:

$$\cos\psi = \cos(\alpha_1 - \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \sin\alpha \cdot \sin\alpha_1.$$

Wegen $\sin\alpha = \cos\beta$ und $\sin\alpha_1 = \cos\beta_1$,

folgert dann

$$\cos\psi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1.$$

§. 242. Zusatz.

Sollen daher die beiden Linien CD und CE auf einander senkrecht stehen, so muß man α, β, α_1, β_1 so nehmen, daß

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 = 0$$

wird.

Umgekehrt: stehen CD und CE auf einander senkrecht, so muß auch $\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 = 0$ werden.

§. 243. Erklärung.

Wenn auch die Lage eines Punktes P im Raume durch seine beiden Projektionen P_1 und P_2 gegeben ist, so ist sie doch nicht durch die Coordinaten PP_1 und PP_2 gegeben, weil man in den Grund=Ebenen G_1, G_2 keine festen Punkte hat, an welche sich diese Coordinaten antragen ließen. Soll daher ein Punkt P bloß durch seine Coordinaten gegeben seyn, so muß man drei auf einander senkrechte Coordinaten=Ebenen (Projektions=Ebenen, Grund=Ebenen) G_1, G_2 und G_3 annehmen, und den Punkt P durch seine drei senkrechten Abstände von diesen Ebenen, nämlich durch

$$PP_1 = a,\ PP_2 = b,\ PP_3 = c$$

bestimmen *).

---

*) Sind nämlich (Fig. 77.) XAY, XAZ und YAZ die drei auf einander senkrechten Ebenen, und P_1, P_2, P_3 die drei Projektionen des Punktes P, so ist PP_3 mit AX, PP_2 mit AY und PP_1 mit AZ parallel, und die auf AX gefällten senkrechten Linien P_1Q und P_2Q müssen in der Axe AX zusammentreffen; desgleichen die senkrechten P_1R und P_3R in der Axe AY, und die senkrechten P_2S und P_3S in AZ und alle diese Linien bilden ein rechtwinkliches Parallelepipedum, so daß $PP_3 = P_1R = AQ$ und

Auch hier unterscheiden wir wieder: 1) die Coordinaten, 2) die Coordinaten-Maaße, die absoluten (nicht positiven und nicht negativen) Zahlen a, b, c, welche statt der Coordinaten (d. h. statt der Linien) in Rechnung gebracht werden; und 3) die Coordinaten-Werthe; so nennen wir aber die positiven und negativen Zahlen

$$+a, -a, +b, -b, +c, -c,$$

die dadurch entstehen, daß man den Maaßen a, b, c, noch das (+) oder das (—) Zeichen vorsetzt, um dadurch zu bestimmen, ob die Coordinate oberhalb oder unterhalb G_1, rechts oder links G_2, auf der einen oder auf der andern Seite von G_3 liegen soll. — Auch nennen wir die Null den Coordinaten-Werth eines Punktes, der in der Coordinaten-Ebene selbst liegt.

Anmerkung. Die drei Coordinaten-Ebenen nach allen Richtungen hin verlängert bilden acht Räume; und sind a, b, c die Coordinaten-Maaße eines Punktes P, so liegt der Punkt P selbst jedesmal in einem andern dieser Räume, je nachdem seine Coordinaten-Werthe

1) $+a, +b, +c$
2) $+a, +b, -c$
3) $+a, -b, +c$
4) $+a, -b, -c$
5) $-a, +b, +c$
6) $-a, +b, -c$
7) $-a, -b, +c$
8) $-a, -b, -c$

sind.

$PP_2 = QP_1$ ist. Sind daher die drei Coordinaten PP_1, PP_2, PP_3 des Punktes P gegeben, so mache man zuerst $AQ = PP_3$, errichte $QP_1 = PP_2$ senkrecht auf AQ, so hat man die Projektion P_1, von wo aus P_1P auf die Ebene YAX senkrecht errichtet, den Punkt P giebt.

§. 244. Zusatz.

Sind x, y und z die Coordinaten-Werthe eines Punktes P, und ist A der Anfangspunkt der Coordinaten, so ist

$$AP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Denn es ist AQP_1 ein bei Q rechtwinkliches Dreieck, und eben so ist das Dreieck AP_1P bei P_1 rechtwinklich; daher

$$AP_1^2 = AQ^2 + QP_1^2;$$

und

$$AP^2 = AP_1^2 + PP_1^2;$$

also

$$AP^2 = AQ^2 + QP_1^2 + P_1P^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

§. 245. Zusatz.

Ist P' ein zweiter Punkt im Raume, dessen Coordinaten-Werthe x', y', z' seyn mögen, so hat man, wenn x, y, z, die Coordinaten-Werthe von P sind, und wenn man sich die Linie PP' gezogen denkt:

$$PP' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Denn man denke sich durch den Punkt P drei neue Axen gezogen PX', PY', PZ' parallel mit den alten, so verhält sich der Punkt P' zu dem Punkte P und den neuen Axen, wie P selbst zu A und den alten Axen. Sind daher x, y, z die Coordinaten-Werthe von P' gegen die neuen Axen, so hat man (nach §. 244.):

$$PP' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

während augenfällig

$$x = x' - x, \quad y = y' - y \quad \text{und} \quad z = z' - z$$

ist.

§. 246. Lehrsatz.

Macht die Linie AP mit den drei Axen AX, AY und AZ, bezüglich die Winkel α, β, γ, so hat man:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Beweis. Denn da AQ senkrecht steht auf der Ebene PP_1Q, so steht sie auch senkrecht auf der Linie PQ; daher ist, weil W. $PAQ = \alpha$, nothwendig

$$\cos\alpha = \frac{AQ}{AP}.$$

Aber eben so ist

$$\cos\beta = \frac{AR}{AP} \quad \text{und} \quad \cos\gamma = \frac{AS}{AP},$$

folglich

$$1)\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{AQ^2 + AR^2 + AS^2}{AP^2}.$$

Nun sind ferner AQ, AR (oder QP_1) und AS (oder PP_1) die drei Coordinaten des Punktes P, folglich (nach §. 244.):

$$2)\ AP^2 = AQ^2 + AR^2 + AS^2.$$

Demnach, wenn man diese Gleichung 2. mit der 1. verbindet:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

§. 247. Zusatz.

Macht eine Linie PP′ mit dreien durch P mit den Axen AX, AY und AZ parallel gedachten Linien AX′, AY′, und AZ′ die Winkel α, β und γ, so ist noch

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Denn PP′ liegt gegen PX′, PY′ und PZ′ genau so, wie AP gegen AX, AY und AZ.

Note. Man ist gewohnt zu sagen, die Linie PP_1 mache mit den drei Axen AX, AY und AZ die Winkel α, β und γ, obgleich sie diese Axen vielleicht gar nicht treffen kann, sondern diese Winkel nur mit den, mit den Axen parallelen Linien PX′, PY′, PZ′ gebildet werden.

§. 248. Lehrsatz.

Bildet AP mit den drei Axen AX, AY und AZ die drei Winkel α, β und γ, und AP′ mit denselben Axen die Winkel α', β' und γ'; und wird der Winkel PAP′ durch ψ bezeichnet, so hat man allemal

$$\cos\psi = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'$$

Beweis. Sind x, y, z die Coordinaten von P, und x′, y′, z′ die Coordinaten von P′, so hat man (nach §. 244.):

$$AP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$AP' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2};$$

und (nach §. 245.):

$$PP' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2};$$

dabei aber im Dreiecke APP'

$$PP'^2 = AP^2 + AP'^2 - 2\,AP \cdot AP' \cdot \cos\psi,$$

oder, wenn man obige Werthe substituirt, im letzten Gliede rechts aber $AP \cdot AP'$ stehen läßt und damit wegdividirt:

$$1)\quad \frac{xx' + yy' + zz'}{AP \cdot AP'} = \cos\psi.$$

Nun ist aber,

$$\frac{x}{AP} = \frac{AQ}{AP} = \cos\alpha \quad \text{und} \quad \frac{x'}{AP'} = \cos\alpha'$$

eben so:

$$\frac{y}{AP} = \cos\beta \quad \text{und} \quad \frac{y'}{AP'} = \cos\beta'$$

und

$$\frac{z}{AP} = \cos\gamma \quad \text{und} \quad \frac{z'}{AP'} = \cos\gamma'.$$

Setzt man daher diese Werthe in 1., so ergiebt sich sogleich

$$2)\quad \cos\psi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma'.$$

Note 1. Zu gleicher Zeit hat man aber auch

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

und

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

wie solches (§. 246.) bewiesen worden.

Note 2. Man konnte denselben Satz mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie entwickeln, in so fern je drei der fünf Linien AP, AP', AX, AY, AZ, unter sich jedesmal ein körperliches Dreieck bilden, von denen die Seiten und mehrere (rechte) Winkel gegeben sind.

§. 249. Zusatz.

Sollen daher die beiden Linien AP und AP' auf einander senkrecht stehen, so muß man

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma' = 0$$

oder (nach N. 1. des vorstehenden Beweises)

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

haben; und derselbe Satz gilt auch umgekehrt.

Anmerkung. Alles dies gilt auch noch, wenn die Linien AP und AP', mit den Axen nicht selbst, sondern nur mit Linien,

welche mit den den Axen parallel laufen, die gegebenen Winkel bilden.

§. 250. Lehrsatz.

Geht eine Ebene V durch den Anfangs-Punkt A der Coordinaten, welche die drei Coordinaten-Ebenen schneidet, und mit denselben, nämlich mit YAX, ZAX und YAZ bezüglich die Winkel α, β, γ macht, so ist ebenfalls

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Beweis. Denn man denke sich durch A eine Linie AP senkrecht auf die Ebene V, so stehen AP und AZ senkrecht auf den Ebenen V und YAX, also ist (nach §. 28.)

$$\text{W. PAZ} = \alpha.$$

Aus demselben Grunde findet sich aber

$$\text{W. PAY} = \beta \text{ und } \text{W. PAX} = \gamma;$$

und da also γ, β und α die Winkel sind, welche eine Linie AP mit den Axen macht, so folgt die zu erweisende Gleichung unmittelbar aus §. 246.

§. 251. Zusatz.

Geht die Ebene V nicht durch den Anfangs-Punkt A der Coordinaten, so gilt derselbe Satz doch noch unverändert, wenn nur α, β, γ die Winkel sind, welche diese Ebene V mit den drei Coordinaten-Ebenen bildet.

Denn die durch A mit dieser V parallel gedachte Ebene bildet mit den Coordinaten-Ebenen (nach §. 57.) dieselben Winkel.

§. 252. Lehrsatz.

Ist F eine beliebige ebene Figur, und sind F_1, F_2 und F_3 ihre drei Projektionen auf die drei Coordinaten-Ebenen, so ist allemal

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Beweis. Denn sind α, β, γ, die Winkel, welche die Ebene F mit den drei Coordinaten-Ebenen bildet, so hat man (nach §. 235.):

$$F_1 = F \cdot \cos\alpha,\ F_2 = F \cdot \cos\beta \text{ und } F_3 = F \cdot \cos\gamma;$$

folglich

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F^2 \cdot (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma);$$

aber (nach §. 246.)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

also ist unser Satz richtig.

§. 253. Lehrsatz.

Sind V und V′ zwei Ebenen, welche mit einander den Winkel ψ bilden; und bildet V mit den drei Coordinaten-Ebenen die Winkel α, β, γ, so wie V′ mit denselben Ebenen die Winkel α', β', γ', so hat man allemal

$$\cos\psi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma'.$$

Beweis. Denn zwei auf V und V′ senkrecht gedachte Linien AP und AP′ bilden unter sich denselben Winkel ψ, und mit den Axen AX, AY, AZ (nach §. 28.) bezüglich die Winkel γ, β und α, so wie γ', β' und α', und so folgt der Lehrsatz unmittelbar aus §. 249.

Note. Dabei ist aber auch noch (nach §. 251.):

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

und

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1.$$

§. 254. Zusatz.

Sollen die beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen, so muß, weil dann $\cos\psi = 0$ werden muß,

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma' = 0$$

seyn; und derselbe Satz gilt auch umgekehrt.

§. 255. Lehrsatz.

Sind A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 die drei Projektionen einer Linie AB, auf drei auf einander senkrechte Grund-Ebenen, so ist allemal

$$AB = \sqrt{\frac{A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2}{2}}.$$

Beweis. Sind x, y, z die Coordinaten des Punktes A, und x′, y′, z′ die des Punktes B, so hat man (nach §. 222. N. 10.):

$$AB^2 = A_1B_1^2 + (z - z')^2$$
$$AB^2 = A_2B_2^2 + (y - y')^2$$
$$AB^2 = A_3B_3^2 + (x - x')^2$$

und (§. 245.)

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=AB^2;$$

folglich, wenn man diese vier Gleichungen addirt und links und rechts aufhebt,

$$2AB^2=A_1B_1{}^2+A_2B_2{}^2+A_3B_3{}^2,$$

woraus die Behauptung hervorgeht.

Schluß-Anmerkung.

Das in diesem Kapitel enthaltene mag hinreichen, was die Coordinaten-Theorie vorzüglich zu berücksichtigen hat, anzudeuten. Während die Sätze des vorhergehenden Kapitels mehr dazu gebraucht werden können, Construktionen im Raume auszuführen, dienen die des gegenwärtigen Kapitels mehr dazu, dieselben Untersuchungen durch Rechnung zu beendigen. Die Sätze des vorhergehenden Kapitels werden daher vorzüglich zur beschreibenden Geometrie leiten, während die des gegenwärtigen Kapitels auf die analytische Geometrie hinführen.

Zuletzt mag man noch bemerken, daß die erstern Sätze dieses Kapitels eigentlich in die ebene Geometrie gehören, hier aber absichtlich mit den spätern zusammengereihet worden sind, um eine bequemere Uebersicht möglich zu machen.

Körperlich-geometrische Zeichenkunst.

Erste Abtheilung.

Beschreibende Geometrie.

Körperlich-geometrische Berechnung.

Erste Abtheilung.

Beschreibende Geometrie*).

Einleitung.

§. 256.

Die Anwendung der körperlichen Geometrie, um Punkte und Linien und Winkel im Raume, ihrer gegenseitigen Lage und Größe nach auf einer Ebene zu verzeichnen, oder doch durch entsprechende Figuren auf Ebenen zu bestimmen, bildet die beschreibende Geometrie (Géométrie descriptive).

Man muß aber dabei folgendes bemerken:

1) Alle Punkte, Linien, Flächen, ꝛc. ꝛc., werden in der Regel auf zwei auf einander senkrechte Grund-Ebenen (Coordinaten-Ebenen, Projektions-Ebenen) G_1 und G_2 bezogen, welche sich in der Axe G_0 schneiden, so daß Punkte und Linien durch ihre Projektionen, Flächen dagegen durch ihre Grundschnitte ausgedrückt werden.

2) Ist α ein Punkt im Raume, so werden seine Projektionen auf G_1 und G_2 durch α_1 und α_2 vorgestellt; die von α_1 und

*) Niemand betrete das Gebiet der beschreibenden Geometrie, der sich nicht vorher mit den Sätzen des ersten und des achten Kapitels genau vertraut gemacht hat. Man kann jene Sätze vorher nie genug studirt haben.

α_2 auf die Axe G_0 gefällten senkrechten Linien fallen in einem und demselben Punkte α_0 zusammen, so daß α, α_1, α_0, α_2 ein auf der Axe G_0 senkrecht stehendes Rechteck bilden, in welchem $\alpha\alpha_1 = \alpha_0\alpha_2$ und $\alpha\alpha_2 = \alpha_0\alpha_1$ ist, so daß, wenn die Projektionen α_1 und α_2 gegeben sind, man sogleich in $\alpha_2\alpha_0$ die Coordinate $\alpha\alpha_1$, und in $\alpha_1\alpha_0$ die Coordinate $\alpha\alpha_2$ erblickt.

3) Ist V eine Ebene, so werden ihre Grundschnitte, d. h. die Durchschnittslinien derselben mit den beiden Projektions- oder Grund-Ebenen G_1 und G_2 bezüglich durch V′ und V″ ausgedrückt. Die Linien G_0 (die Axe) und V′ und V″ laufen daher alle drei in einem und demselben Punkte zusammen, der dann allemal durch V_0 bezeichnet werden mag; oder sie laufen alle drei mit einander parallel.

Und ist a eine Linie im Raume, so werden ihre beiden Grundschnitte, d. h. die Punkte, wo solche die Grund-Ebenen G_1 und G_2 trifft, bezüglich durch a′ und a″ vorgestellt.

Und eine Ebene V, und eine Linie a, ist jedesmal durch ihre beiden Grundschnitte V′ und V″, oder a′ und a″ völlig gegeben.

4) Die beiden Projektions-Ebenen G_1 und G_2 denkt man sich bei dem praktischen Zeichnen und Construiren jedesmal dergestalt aufgeklappt (d. h., die eine davon um die Axe G_0 dergestalt herumgedreht), daß sie mit einander in eine und dieselbe (Zeichnen-) Ebene fallen. In diesem Zustande fallen $\alpha_1\alpha_0$ und $\alpha_2\alpha_0$, weil sie beide auf G_0 senkrecht stehen, ebenfalls in eine und dieselbe Richtung zusammen, welche senkrecht auf der Axe G_0 stehen wird.

5) Will man daher in diesem praktischen Zustande der Grund-Ebenen, den wir immer voraussetzen, so oft praktische Zeichnungen ausgeführt werden sollen, wenn von einer (unendlichen) geraden Linie AB ihre Projektionen A_1B_1 und A_2B_2 gegeben sind, einen beliebigen Punkt C in ihr annehmen, so wählt man in A_1B_1 (Fig. 78.) einen beliebigen Punkt C_1,

fällt von ihm aus auf die Axe G_0 die senkrechte C_1C_0 und verlängert diese, bis sie A_2B_2 in C_2 trifft, und C_2 ist dann die zweite Projektion des beliebig in AB gedachten Punktes C.

6) Und kennt man von einer Ebene V nur einen der Grundschnitte V', so braucht man von dem andern Grundschnitte V'' nur noch einen Punkt zu kennen, um letztern selbst zu haben, weil der Punkt V_0, wo der erste Grundschnitt V' die Axe G_0 trifft, allemal auch schon ein Punkt des zweiten Grundschnittes seyn muß.

7) Sind zwei Linien AB und CD im Raume mit einander parallel, so sind auch ihre Projektionen A_1B_1 und C_1D_1, desgleichen A_2B_2 und C_2D_2 mit einander parallel. Und schneiden sich AB und CD in einem Punkte E, so schneiden sich auch ihre Projektionen A_1B_1 und C_1D_1 in E_1, so wie A_2B_2 und C_2D_2 in E_2, so daß E_1 und E_2 die Projektionen des Durchschnitts-Punktes E sind, daß also die Linie von E_1 senkrecht auf die Axe G_0 gezogen und verlängert (die Grundebenen im aufgeklappten Zustande gedacht) nothwendig auch durch E_2 gehen muß.

Laufen daher nicht beide Paare Projektionen mit einander parallel, A_1B_1 mit C_1D_1 und A_2B_2 mit C_2D_2, und schneiden sich auch nicht beide Paare Projektionen in Punkten E_1 und E_2, die so liegen, daß E_1E_2 die Axe G_0 senkrecht schneidet, so laufen AB und CD nicht mit einander parallel und schneiden sich auch nicht, liegen also nicht in einer und derselben Ebene.

Anmerkung. Und weil wir bei diesem praktischen Zeichnen außer den früher bereits definirten Ebenen und Flächen auch noch den allgemeineren Cylinder und Kegel, dann den windschiefen Cylinder und die Umdrehungsflächen, ihrer in den Künsten und vorzüglich in der Baukunst (z. B. bei dem Steinschnitte) oft vorkommenden Anwendung wegen, mit berücksichtigen wollen, so mögen nachstehende Erklärungen und Sätze hier in dieser Einleitung noch Platz finden, da wir in der Theorie krumme Linien

und Flächen, außer den betrachteten, nicht weiter verfolgen konnten.

§. 257. Erklärung *).

Ein allgemeiner Kegel K entsteht, wenn eine gerade Linie a um den in ihr liegenden Punkt α dergestalt sich herumbewegt, daß während sie immer in diesem Punkte bleibt, solche nach und nach alle Punkte einer beliebigen (geschlossenen oder nicht geschlossenen, einfach oder doppelt gekrümmten) krummen Linie s durchläuft. Die krumme Linie s heißt seine Richtungs-Linie, a seine Erzeugungs-Linie, α seine Spitze; und die geraden Linien, mit welchen die Erzeugungs-Linie a nach und nach zusammenfällt, werden die Seiten des Kegels genannt.

Anmerkung. Den hier zu betrachtenden Kegel denkt man sich immer unendlich, d. h. von keiner Grundfläche begrenzt, so daß seine Erzeugungs-Linie auf beiden Seiten von α in's Unendliche fortgehend gedacht wird. — Es ist also eigentlich nur die conische Fläche und nicht der Körper selber, welcher hier (in der beschreibenden Geometrie) unter dem Kegel verstanden wird.

Ist s eine Kreislinie, und denkt man sich die conische Fläche durch die Ebene der s begrenzt, so entsteht der früher betrachtete elementare Kegel.

§. 258. Erklärung.

Der gerade Cylinder entsteht, wenn eine gerade Linie a parallel mit sich selbst, oder parallel mit einer andern gegebenen Linie p, sich an einer gegebenen beliebigen (geschlossenen

*) Was hier noch bis zu Ende der Einleitung folgt, hängt mit der früher vorgetragenen Theorie nur sehr lose zusammen. Für den praktischen Zweck, der hier erreicht werden soll, kam es jedoch nur darauf an, recht anschaulich zu werden, wo man gründlich nicht seyn kann. Der Anfänger kann endlich alles hier vom §. 257. an bis zum §. 266. Folgende vorläufig überschlagen.

oder nicht geschlossenen, einfach oder doppelt gekrümmten) krummen Linie s hinbewegt. Auch hier heißt s die Richtungs-Linie, a die Erzeugungs-Linie; und die geraden Linien, mit welchen a nach und nach in ihrer Bewegung zusammenfällt, werden die Seiten des Cylinders genannt.

Anmerkung. In der beschreibenden Geometrie wird ebenfalls nur die cylindrische Fläche unter dem Worte Cylinder verstanden, indem man sich die Erzeugungs-Linie a jedesmal nach beiden Seiten hin ins Unendliche fortlaufend, die cylindrische Fläche also auf keiner Seite hin durch Ebenen völlig begrenzt denkt.

Ist s eine Kreislinie und denkt man sich die krumme Fläche durch die Ebene s und durch eine mit ihr parallele Ebene völlig begrenzt, so entsteht der elementare Cylinder, wie solcher früher von uns betrachtet worden ist.

Note. Jede senkrechte Mauer oder Wand, deren Grundriß eine beliebig vorgeschriebene krumme Linie (etwa die Grenze eines Gartens) seyn soll, ist ein solcher allgemeinerer Cylinder, wie er hier eben definirt worden. — Ein gewöhnliches Bohlendach ist ebenfalls ein solcher Cylinder.

§. 259. Erklärung.

Ein windschiefer Cylinder (cylindre gauche) entsteht, wenn sich eine gerade Erzeugungs-Linie (génératrice) p auf zwei beliebigen (geschlossenen oder nicht geschlossen, geraden oder krummen, einfach oder doppelt gekrümmten) Richtungs-Linien (directrices) a und b dergestalt fortbewegt, daß sie 1) immer a und b zugleich trifft, 2) beständig mit einer gegebenen Ebene P (seine Parallel-Ebene, plan de parallélisme, genannt) parallel bleibt.

Sind die Richtungs-Linien a und b, gerade Linien, nicht in derselben Ebene, übrigens in ganz beliebiger Lage, so wird der windschiefe Cylinder in's Besondere eine windschiefe Ebene (plan gauche) genannt.

Auch den windschiefen Cylinder denkt man sich nur als un-

endliche Fläche, und die geraden Linien in ihm, mit welchen die Erzeugungs-Linie a nach und nach in ihrer Bewegung zusammenfällt, mögen ebenfalls die Seiten des windschiefen Cylinders oder der windschiefen Ebene heißen.

Anmerkung. Um sich von dem windschiefen Cylinder und somit auch von der windschiefen Ebene einen völlig deutlichen Begriff zu verschaffen, denke man sich durch die stetig auf einander folgenden Punkte α, α', α'', ꝛc. der einen Richtungs-Linie a, stetig auf einander folgende, mit P parallele Ebenen E, E', E'', ꝛc. gelegt, so werden diese die andere Richtungs-Linie b in stetig auf einander folgenden Punkten β, β', β'', ꝛc. schneiden, so daß $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$, ꝛc. die, nicht gerade unter sich, aber doch jedesmal mit der Ebene P parallelen Linien seyn werden (die Seiten des windschiefen Cylinders), mit welchen die Erzeugungs-Linie p nach und nach zusammenfällt.

Note. Denkt man sich z. B. ein Bohlendach, deren äußerste Bogen (Sparren) nicht in (parallelen) Ebenen liegen, oder nicht congruent sind, oder nicht gleichweit vorspringen, übrigens aber durch Latten nach der Setzwage, also parallel mit dem Horizont, mit einander verbunden sind, so hat man einen solchen windschiefen Cylinder.

Eine windschiefe Ebene dagegen stellt dasjenige Dach vor, welches gerade Endsparren, hat, die aber nicht in einer und derselben Ebene, sondern ganz beliebig liegen, dagegen durch Latten nach der Setzwage, d. h. parallel mit dem Horizont gelegt, mit einander verbunden sind.

§. 260. Erklärung.

Denkt man sich eine gerade oder krumme, einfach oder doppelt gekrümmte unveränderliche Erzeugungs-Linie s, um eine feste gerade Linie a als Umdrehungs-Axe (die mit s in einer und derselben Ebene liegen mag oder nicht) dergestalt herumbewegt, daß jeder einzelne Punkt von s einen auf a senkrechten und seinen Mittelpunkt in a habenden Parallelkreis beschreibt, so entsteht eine krumme Fläche, welche Umdrehungsfläche genannt wird.

Eine Ebene durch die Axe a gelegt, heißt Meridian-Ebene, und die Linie (gerade oder krumme), in welcher sie die

krumme Umdrehungsfläche schneidet, mag Meridian-Linie genannt werden.

Anmerkung. Um sich den Begriff einer Umdrehungsfläche noch deutlicher zu machen, denke man sich Anfangs aus allen Punkten der Erzeugungs-Linie s auf die Umdrehungs-Axe a senkrechte Linien (die in einer und derselben oder in verschiedenen Ebenen liegen können), und nun das ganze System fest und um a herumbewegt, so fällt in die Augen, wie die einzelnen Punkte von s, Kreise beschreiben, während s selbst unveränderlich bleibt.

Note. Zu den Umdrehungsflächen gehören auch der senkrechte Cylinder und der senkrechte Kegel, wie solche (§. 89. und §. 114.) definirt worden sind, welche durch, auf ihre Axe senkrechte Ebenen in lauter (Parallel-) Kreisen geschnitten werden. Ferner ist die Kugel eine Umdrehungsfläche. — Auch alle Säulen, oder doch alle diejenigen Theile der Säulen, welche durch (mit dem Horizont) parallele Ebenen in Kreislinien geschnitten werden, gehören zu den Umdrehungsflächen.

§. 261. Erklärung.

Unter Berührungs-Ebene (plan tangent) an eine beliebige krumme Fläche versteht man die Ebene, welche die gedachte Fläche nur in einem Punkte α oder doch nur in einer Linie a trifft, so jedoch, daß die rings um α herum oder auf beiden Seiten von a, nächst anliegenden Punkte der Ebene, auf einer und derselben Seite der krummen Fläche liegen. — Und Berührungs-Linie (tangente) wird die Linie genannt, welche die krumme Fläche nur in einem Punkte α trifft, deren nächst vorhergehenden und nächst folgenden Punkte aber auf einer und derselben Seite der krummen Fläche liegen.

Ein Berührungs-Cylinder (cylindre-enveloppe) an eine krumme Fläche wird derjenige Cylinder genannt, welcher durch lauter parallele Berührungs-Linien der krummen Fläche gebildet wird.

Berührungs-Kegel (cône enveloppe) an eine krumme Fläche dagegen heißt diejenige conische Fläche, welche durch lau-

ter von einem Punkte α ausgehende Berührungs-Linien gebildet worden ist.

Und die Linie, welche eine Berührungs-Ebene, ein Berührungs-Cylinder oder ein Berührungs-Kegel mit der krummen Fläche gemein hat, mag die Linie der Berührung (ligne de contact) (nicht aber Berührungs-Linie) genannt werden. Und der Punkt, in welchem eine krumme Fläche von einer Ebene oder von einer Linie berührt wird, heißt dann der berührte Punkt, Punkt der Berührung (point de contact, auch Berührungs-Punkt) *).

§. 262. Erklärung.

Zwei krumme Flächen berühren sich in einem Punkte α, wenn sie an diesem Punkte eine gemeinschaftliche Berührungs-Ebene haben.

Und eine Linie a wird eine Normale auf die krumme Fläche genannt, oder man sagt von ihr, daß sie senkrecht auf der krummen Fläche stehe, wenn sie die krumme Fläche in einem Punkte α trifft und auf der, durch diesen Punkt α gelegten Berührungs-Ebene senkrecht steht.

§. 263. Erklärung.

Auch bei krummen Flächen und bei krummen Linien, grade wie bei ebenen Flächen und bei geraden Linien, werden die Durchschnitts-Linien oder die Durchschnitts-Punkte derselben mit den Projektions-Ebenen die Grundschnitte genannt. — Während aber Ebenen und gerade Linien durch ihre beiden Grundschnitte völlig gegeben sind, ist dies bei den krummen Flächen und krummen Linien nicht so der Fall.

---

*) Man würde fast besser thun, berührende Linie, berührte Linie und Berührungs-Linie von einander zu unterscheiden; berührende Linie müßte diejenige genannt werden, welche im Texte Berührungs-Linie heißt; Berührungs-Linie dagegen sollte dann mit Linie der Berührung einerlei seyn.

§. 264. Erklärung.

Endlich wollen wir hier, um Zeichnung von Figuren zu ersparen, und um uns kürzer ausdrücken zu können, noch folgende Benennungen und Bezeichnungen festsetzen, welche allemal strenge angewandt werden sollen, so oft keine Figur zur Versinnlichung gebraucht wird.

1) Alle krummen und ebenen Flächen bezeichnen wir allemal und durchaus durch große lateinische Buchstaben, z. B. C, K, V, ꝛc. ꝛc.; und ihre Grundschnitte (d. h. ihre Durchschnitte mit G_1 und G_2) bezüglich durch C′, C″, K′, K″, V′, V″ ꝛc.

2) Alle übrigen geraden oder krummen Linien bezeichnen wir allemal und durchaus mit kleinen lateinischen Buchstaben, z. B. a, b, c, ꝛc. ꝛc., so wie ihre Projektionen auf G_1 und G_2 bezüglich durch a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, ꝛc. Und die Punkte, wo diese Linien a, b, c, ꝛc. die Grund-Ebenen treffen (die Grundschnitte), werden durchaus durch a′, a″, b′, b″, c′, c″, ꝛc. bezeichnet.

3) Alle übrigen Punkte dagegen werden durchaus durch kleine griechische Buchstaben kenntlich gemacht, z. B. durch α, β, γ, ꝛc. ꝛc.

Note. Große lateinische Buchstaben, die oben rechts mit ′ oder ″ versehen sind, so wie alle einfachen kleinen lateinischen Buchstaben, und alle kleinen lateinischen Buchstaben, die rechts unten mit $_1$ oder $_2$ versehen sind, bedeuten also Linien. Kleine lateinische Buchstaben, welche rechts oben mit ′ oder ″ versehen sind, so wie die kleinen griechischen Buchstaben bedeuten dagegen allemal Punkte.

4) Das Zeichen (L. C, V) stellt allemal die Durchschnitts-Linie der beiden (ebenen oder krummen) Flächen C und V vor. Desgleichen bedeutet (P. a, b) und P. (a, V) und P. (C, K, V) den Punkt, in welchem sich die Linien a und b schneiden, oder in welchem die Fläche V von der Linie a getroffen wird, oder endlich, in welchem sich die drei Flächen C, K und V einander schneiden.

Note. Da die Grund-Ebenen allemal durch G_1 und G_2 vorgestellt werden, so ist C' gleichbedeutend mit (L. C, G_1) und C'' gleichbedeutend mit (L. C, G_2). — Eben so ist a' gleichbedeutend mit (P. a, G_1) und a'' gleichbedeutend mit (P. a, G_2).

Anmerkung. Werden aber Figuren zu Grunde gelegt, in den beigefügten Figurentafeln, so werden die Punkte auch durch die großen lateinischen Buchstaben vorgestellt, während jedoch die übrige so eben angegebene Bezeichnung auch dann noch gültig bleibt.

§. 265. Lehrsätze.

1) Sind $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ zwei, in α eine krumme Fläche berührende gerade Linien, so ist die durch sie gebildete Ebene $\beta\alpha\gamma$ eine Berührungs-Ebene an dieselbe krumme Fläche in demselben Punkte α. — Wenn man daher in α zwei Ebenen V und W bezüglich senkrecht auf die Tangenten $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ errichtet, so ist die Durchschnitts-Linie (L. V, W) dieser Ebenen V und W, die Normale auf die krumme Fläche, in diesem Punkte α.

2) Hat eine krumme Fläche eine gerade Linie zur Erzeugungs-Linie, so geht die Berührungs-Ebene durch die in dem Berührungs-Punkte anwesende Erzeugungs-Linie (Seite), d. h. letztere liegt ganz in ihr. — Im Kegel und im Cylinder liegen daher alle zu Punkten einer und derselben Erzeugungs-Linie gehörigen Normalen in einer und derselben auf der Berührungs-Ebene senkrechten Ebene.

3) Jeder gerade Cylinder (in der weitern Bedeutung des §. 258.) wird durch beliebige mit einander parallele Ebenen in congruenten Durchschnitts-Figuren geschnitten; und Sehnen, welche in diesen Durchschnitts-Figuren zu denselben Seiten des Cylinders gehören, bilden gleiche Winkel mit einander, weil sie mit einander parallel laufen und mit den zugehörigen Erzeugungs-Linien Parallelogramme bilden. Und Tangenten (Berührungs-Linien), welche diese Schnitte in Punkten einer und derselben Erzeugungs-Linie berühren, laufen ebenfalls mit einander parallel.

4) Auch wenn der Kegel (in der weitern Bedeutung des §. 257.) von parallelen Ebenen, übrigens beliebig geschnitten wird, so sind die Sehnen und die Tangenten, welche in den verschiedenen Durchschnitts-Figuren an denselben Seiten des Kegels liegen, mit einander parallel und bilden dann auch gleiche Winkel mit einander; auch sind die Sehnen zu einander proportionirt, so groß oder so klein man sie nimmt, wenn sie nur an denselben Seiten des Kegels liegen. (Dieser letztern Eigenschaft wegen nennt man diese Durchschnitts-Figuren wohl auch ähnliche Figuren.)

5) In einer Umdrehungs-Fläche bilden alle senkrecht auf die Umdrchungs-Axe gedachten Ebenen, Kreis-Linien zu Durchschnitts-Figuren (nämlich die Parallel-Kreise des §. 260.); und alle Meridian-Ebenen (d. h. alle durch die Umdrehungs-Axe gelegten Ebenen) bilden congruente Durchschnitts-Figuren, d. h. alle Meridian-Linien sind einander congruent. — Und weil dieselbe Umdrehungs-Fläche entsteht, wenn man eine der Meridian-Linien um die Umdrehungs-Axe sich herumbewegen läßt, so nennt man letztere auch die ebene Erzeugungs-Linie der Umdrehungs-Fläche. — Und die Linien, welche senkrecht auf einer dieser Meridian-Linien stehen, stehen auch senkrecht auf der krummen Fläche. — Auch gilt das letztere umgekehrt; und alle diese Normalen gehen auch durch die Umdrehungs-Axe, und fallen sogar daselbst in einem und demselben Punkte zusammen, wenn die Punkte, in denen sie die Umdrehungs-Fläche treffen, in einem und demselben Parallel-Kreise liegen.

6) Eine windschiefe Ebene wird von einer mit ihren Richtungs-Linien parallelen Ebene in einer geraden Linie geschnitten und jede solche gerade Linie heißt eine Querseite (génératrice transversale, transversale Seite) der windschiefen Ebene.

Denn es seyen Fig. 91. $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ drei beliebige Seiten derselben (§. 259.), und zwar α, α', α'' drei Punkte in der ersten Richtungs-Linie a, so wie β, β' und β'' die drei zugehörigen Punkte in der andern b, und

γDEγ'' sey die mit a und b parallele Ebene, welche die Geraden $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ und $\alpha''\beta''$ in den Punkten γ, γ', γ'' treffen mag, — so hat man bloß zu erweisen, daß γ, γ' und γ'' in einer und derselben geraden Linie liegen.

Man denke sich zu dem Ende durch β' und durch α zwei gerade Linien β'A und αA bezüglich mit $\beta\alpha$ und $\beta\beta'$ parallel, welche sich in A schneiden und das Parallelogramm $\alpha\beta\beta'$A bilden. Ferner ziehe man β''B ebenfalls mit $\beta\alpha$ parallel, so liegt β''B mit dem Parallelogramm $\alpha\beta\beta'$A in einer und derselben Ebene und diese Parallele β''B mag die αA in dem Punkte B schneiden. Dann ist die Ebene B$\alpha\alpha''$ mit der b parallel, während die a in ihr liegt; folglich ist dieselbe auch mit der γDEγ'' parallel (in welcher letzteren die Punkte γ, γ', γ'' liegen). Diese beiden parallelen Ebenen werden von der Ebene $\alpha''\beta''$B in den parallelen Durchschnitts-Linien α''B und γ''E geschnitten, wo E der Durchschnitts-Punkt der β''B mit der Ebene γDEγ'' seyn mag. Eben so werden dieselben beiden parallelen Ebenen von der Ebene $\alpha'\beta'$A in den parallelen Linien α'A und γ'D geschnitten, wo D den Punkt vorstellen mag, in welchem die γDEγ'' von der β'A getroffen wird. Da nun nach der Definition der windschiefen Ebene (§. 259.) die Erzeugungs-Linien $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ und $\alpha''\beta''$ mit einer und derselben Ebene parallel laufen, also in parallelen Ebenen liegen, so werden die Richtungs-Linien a und b, und auch die Gerade αAB von diesen parallelen Ebenen bezüglich in den Punkten α und β, desgleichen α', β' und A, endlich α'', β'' und B geschnitten. Folglich sind (nach §. 56.) die Stücke zwischen diesen parallelen Ebenen, proportionirt; d. h. es ist

1') $\alpha\alpha' : \alpha\alpha'' = \beta\beta' : \beta\beta'' = \alpha$A : αB.

Aber eben dieser Proportion wegen (in dem Dreiecke AB$\alpha''\alpha'\alpha$) ist α'A mit α''B parallel; also sind auch alle vier Linien γ'D, α'A, α''B und γ''E mit einander parallel; also ist namentlich auch γ'D mit γ''E parallel. — Dann ist aber wieder

$$\alpha''\text{B} : \gamma''\text{E} = \beta''\text{B} : \beta''\text{E} = \beta'\text{A} : \beta'\text{D}^{*}) = \alpha'\text{A} : \gamma'\text{D},$$

d. h.

2') α''B : α'A = γ''E : γ'D;

es ist aber auch

3') α''B : α'A = αB : αA = γE : γD;

folglich, wenn man die 2'. mit der 3'. verbindet,

---

*) Es ist nämlich β'A = β''B, weil β'ABβ'' ein Parallelogramm ist. Es ist aber β'D = β''E, weil alle Punkte β', β'' einer Geraden b, die mit einer Ebene γDEγ'' parallel läuft, von letzterer gleich weit abliegen.

4') $\gamma''E : \gamma'D = \gamma E : \gamma D$;

und da außerdem noch, wie wir oben gesehen haben, $\gamma''E$ mit $\gamma'D$ parallel läuft, so müssen γ, γ' und γ'' in einer und derselben geraden Linie liegen. Denn, wäre dies nicht, so könnte man $\gamma\gamma''$ ziehen, welche die $\gamma'D$ in einem Punkte X träfe, so daß man hätte

$$\gamma''E : XD = \gamma E : \gamma D;$$

also auch $\gamma''E : XD = \gamma''E : \gamma'D$;

folglich wäre $XD = \gamma'D$,

d. h. es wäre ein Theil so groß wie das Ganze; also muß X mit γ' zusammenfallen.

7) Ein Cylinder (im Sinne des §. 258.) ist durch einen seiner Grundschnitte und durch die Projektionen seiner erzeugenden Linie ganz und völlig gegeben.

Denn der Cylinder entsteht wiederum, wenn man die erzeugende Linie, welche durch ihre Projektionen gegeben ist, parallel mit sich an dem gegebenen Grundschnitte hinbewegt sich denkt.

8) Ein Kegel (im Sinne des §. 257.) ist durch seinen Grundschnitt und durch die Projektionen seiner Spitze ganz und völlig gegeben.

Denn der Kegel entsteht wiederum, wenn man die erzeugende Linie um seine Spitze längs des gegebenen Grundschnittes hinbewegt sich denkt.

9) Ein Cylinder und ein Kegel ist durch die Projektionen seiner Richtungs-Linie, und durch die Projektionen seiner erzeugenden Linie, oder seiner Spitze, ganz und völlig gegeben.

10) Eine Kugel ist durch die Projektionen ihres Mittelpunktes, und durch die Länge ihres Radius ganz und vollständig gegeben.

11) Ein windschiefer Cylinder (also auch eine windschiefe Ebene) ist durch die Projektionen seiner (ihrer) beiden Richtungs-Linien und durch die Grundschnitte seiner Parallel-Ebene ganz und völlig gegeben.

Und denkt man sich durch den windschiefen Cylinder W zwei Ebenen A und B ganz beliebig gelegt, so ist es für die

Bildung des windschiefen Cylinders ganz einerlei, ob man die gegebenen (vielleicht doppelt gekrümmten) Richtungs-Linien nimmt, oder dafür die beiden (ebenen) Durchschnitts-Figuren der Ebenen A und B mit dem windschiefen Cylinder W. Letztere nennt man daher die ebenen Richtungs-Linien des windschiefen Cylinders.

Gewöhnlich legt man aber diese Ebenen A und B parallel mit einer der Grund-Ebenen, während die Parallel-Ebene des windschiefen Cylinders wenigstens auf der andern Grund-Ebene senkrecht gedacht wird, wenn nicht auf beiden Grund-Ebenen zugleich.

12) Eine Umdrehungs-Fläche ist durch die Projektionen ihrer Umdrehungs-Axe, und durch die Projektionen ihrer wirklichen oder ihrer ebenen Erzeugungs-Linie ganz und völlig gegeben.

13) Die Projektionen eines Durchschnitts-Punktes einer geraden und einer krummen Linie, oder zweier krummen Linien, liegen da, wo sich die Projektionen der Linien einander schneiden, genau so wie bei zweien geraden Linien.

14) Eine Berührungs-Ebene an einem Punkte α enthält eine unendliche Menge durch α hindurchgehender Berührungs-Linien.

15) Eine Linie a, welche eine, ganz und mit allen ihren Punkten in einer krummen Fläche liegende, gerade oder krumme Linie b berührt, berührt auch die krumme Fläche selbst.

16) Wo eine Berührungs-Ebene und eine krumme Fläche in ihrem Berührungs-Punkte von einer beliebigen Ebene geschnitten werden, da entstehen zwei Linien (wovon die letztere krumm ist) und diese berühren einander.

Daher ist der Grundschnitt einer Berührungs-Ebene allemal Tangente des Grundschnittes des berührten Cylinders oder Kegels.

Beschreibende Geometrie.

Erstes Kapitel.

Construktionen gerader Linien und Ebenen im Raume.

§. 266. Aufgabe.

Die Entfernung AB zweier gegebenen Punkte A und B zu finden; d. h. von zweien Punkten A und B sind ihre Projektionen A_1, B_1, A_2 und B_2 gegeben, man soll eine Linie zeichnen, welche der AB gleich ist (Fig. 79.).

Auflösung. Die Linien AB, A_1B_1 und die projicirenden Linien AA_1 und BB_1, welche aber bezüglich durch A_2A_0 und B_2B_0 gegeben sind, bilden mit einander ein bei A_1 und B_1 rechtwinkliches Trapez. Man errichte daher $A_1\alpha = A_2A_0$ und $B_1\beta = B_2B_0$ senkrecht auf A_1B_1, so ist $\alpha\beta = AB$.

Anmerkung 1. In Bezug auf die andere Projektions-Ebene konnte man AB gerade so erhalten.

Anmerkung 2. Zieht man $\alpha\gamma$ parallel mit A_1B_1, so bilden $\alpha\beta$, $\alpha\gamma = A_1B_1$ und $\beta\gamma = B_2B_0 - A_2A_0 = B_2\delta$ (wenn $A_2\delta$ mit G_0 parallel gezogen ist) ein rechtwinkliches

Dreieck, und man dürfte daher nur $A_2\delta$ mit der Axe G_0 parallel ziehen, sie verlängern, bis $\delta\varepsilon = A_1B_1$ wird, und $B_2\varepsilon$ wäre abermals die gesuchte AB.

§. 267. Zusatz.

Wünschte man umgekehrt die Projektionen des Punktes C in der Geraden AB zu haben (Fig. 79.), welcher von A um die Länge d entfernt seyn soll, so würde man $\alpha\mu = d$ machen, μC_1 senkrecht auf A_1B_1 fällen, und dann C_1C_0 senkrecht auf die Axe G_0, bis sie in der Verlängerung die A_2B_2 in C_2 trifft, und C_1, C_2 wären die Projektionen des Punktes C.

§. 268. Zusatz.

Und würde der erste Grund-Winkel von AB, d. h. der Neigungs-Winkel der (durch ihre Projektionen gegebenen) Linie AB gegen die erste Projektions-Ebene G_1 gesucht, so müßte man nur bedenken, daß dieser Grund-Winkel kein anderer ist, als derjenige, den AB mit A_1B_1 bildet. Man würde also (Fig. 79.) $\alpha\gamma$ parallel mit A_1B_1 ziehen und $\beta\alpha\gamma$ wäre dieser gesuchte Grund-Winkel *).

§. 269. Aufgabe.

Die Grundschnitte einer (durch ihre Projektionen) gegebenen Linie AB zu finden (Fig. 80.).

Auflösung. Der gesuchte erste Grundschnitt (d. h. der Durchschnitts-Punkt der Linie AB mit G_1) liegt erstlich in A_1B_1; aber auch in der Durchschnitts-Linie der Ebene ABA_2B_2 mit G_1, welche Linie wiederum auf der Axe senkrecht steht und die Axe mit A_2B_2 zugleich trifft.

---

*) Was für die eine z. B. die erste Projektions-Ebene G_1 gilt, das läßt sich auch allemal mutatis mutandis auf die zweite Projektions-Ebene G_2 anwenden, weshalb auch in der Folge bei ähnlichen Aufgaben immer nur von der ersten die Rede seyn wird.

Man verlängere daher A_2B_2, bis sie die Axe G_0 in α trifft, errichte αC senkrecht auf die Axe, bis sie die A_1B_1 in C trifft, so ist C der Durchschnitts-Punkt der AB mit G_1. — Eben so findet sich D als der Durchschnitts-Punkt der AB mit G_2.

Anmerkung 1. Liegt die Linie AB in einer Ebene V, so werden C und D in den Grundschnitten V′ und V″ dieser Ebene liegen; und an dieser Lage wird man umgekehrt erkennen, ob eine gegebene Linie AB in einer gegebenen Ebene V liegen werde oder nicht.

Anmerkung 2. Wollte man untersuchen, ob ein durch seine Projektionen gegebener Punkt A, in einer durch ihre Grundschnitte gegebenen Ebene V liege oder nicht, so würde man z. B. in dem Grundschnitte V″ einen beliebigen Punkt B nehmen, dessen zweite Projektion B selber, dessen erste Projektion aber in der Axe G_0 wäre, und nun untersuchen (nach Anmerkung 1.), ob die Linie AB in der Ebene V liegen werde, d. h. ob der Punkt C, in welchem AB die G_1 trifft, in V′ gefunden werde.

Anmerkung 3. Man untersucht aber am einfachsten, ob ein gegebener Punkt α (Fig. 93.) in einer Ebene V liege, dadurch, daß man durch α_1 mit V′ eine parallele Linie $\alpha_1\beta_1$ zieht, welche die Axe G_0 in β_1 trifft, dann von β_1 aus in G_2 abermals eine Linie $\beta_1\gamma$ auf die Axe G_0 senkrecht errichtet, bis sie V″ in γ trifft. Ist nun $\beta_1\gamma = \alpha_0\alpha_2$, so liegt α in V; und ist nicht $\beta_1\gamma = \alpha_0\alpha_2$, so liegt auch nicht α in V.

Denkt man sich nämlich durch $\alpha_1\beta_1$ eine Ebene senkrecht auf G_1, so schneidet solche die Ebene V in einer Geraden $\alpha\beta$, welche mit V′ und mit $\alpha_1\beta_1$ parallel läuft, so daß wenn β der Durchschnitts-Punkt derselben mit G_2 (in ihrer wirklichen auf G_1 senkrechten Lage) ist, $\alpha\alpha_1 = \beta\beta_1$ seyn wird, während der Punkt β ein Punkt des zweiten Grundschnittes V″ seyn muß. Im aufgeklappten Zustande von G_2 fällt daher $\beta_1\beta$ mit $\beta_1\gamma$ zusammen; folglich ist auch $\alpha\alpha_1 = \alpha_0\alpha_2 = \beta_1\gamma$, sobald α in V liegt.

Und ob eine Linie AB in einer Ebene V liegt, erkennt

man auch daran, daß zwei beliebig in ihr genommene Punkte in V liegen.

Oder man zieht $\alpha_1\beta_1$ parallel mit V' und $\alpha_2\gamma$ parallel mit der Axe G_0, zuletzt $\beta_1\gamma$, und ist dann $\beta_1\gamma = \alpha_0\alpha_2$, so liegt α in V, dagegen liegt α nicht in V, wenn diese letztere Bedingung nicht erfüllt ist.

§. 270. Aufgabe.

Die Grundschnitte der Ebene zu zeichnen, welche zwei in dem Punkte C sich schneidende (und durch ihre Projektionen gegebene) Linien AC und BC mit einander bilden (Fig. 81.).

Auflösung. Man suche (nach §. 269.) die ersten Grundschnitts-Punkte α und β von AC und BC, so ist $\alpha\beta$ der gesuchte erste Grundschnitt, und wenn solcher die Axe G_0 in γ trifft, so ist γ bereits ein Punkt des gesuchten zweiten Grundschnittes. Man suche daher noch (nach §. 269.) den Durchschnitts-Punkt δ der Linie AC oder BC mit G_2, und $\gamma\delta$ ist der gesuchte zweite Grundschnitt der Ebene ABC.

Anmerkung 1. Wären statt der beiden Linien AC und BC, drei Punkte A, B und C gegeben gewesen, so würde die Aufgabe von der eben gelösten nicht verschieden gewesen seyn. — Eben so wenig hätte es eine Aenderung in der Construktion hervorgebracht, wenn die beiden gegebenen Linien mit einander parallel gewesen wären.

Anmerkung 2. Wäre von einer Ebene V nur der erste Grundschnitt V' gegeben, dagegen ein Punkt ε noch (durch seine Projektionen), welcher in ihr liegt, und sollte nun der andere Grundschnitt V'' construirt werden, so könnte man außer ε noch in dem Grundschnitte V' zwei beliebige Punkte annehmen, etwa α und β, und dann die vorliegende Aufgabe eintreten lassen, weil α und β dann auch in V selbst liegen würden.

§. 271. Aufgabe.

Von einer Ebene V ist der eine Grundschnitt V′ gegeben, und außerdem noch ein Punkt A in ihr durch seine Projektionen A_1 und A_2; man soll den Punkt A um V′ auf G_1 klappen; d. h. man soll angeben, wo der Punkt A in G_1 hinfallen werde, wenn man sich V um V′ gedreht und auf G_1 gelegt denkt (Fig. 82.).

Auflösung. Man ziehe $A_1\alpha$ senkrecht auf V′, construire aus $A_1\alpha$ und $\alpha\beta = A_2A_0$ als Katheten, ein rechtwinkliches Dreieck $A_1\alpha\beta$, so ist $A_1\beta$ die wahre Entfernung des A von α; diese trage man von α aus in die Verlängerung von $A_1\alpha$, so daß $\alpha\gamma = A_1\beta$ wird, und γ ist der um V′ auf G_1 geklappte Punkt A.

§. 272. Zusatz.

Sollte eine in V gegebene gerade Linie AB um V′ auf G_1 geklappt werden, so würde man jeden der beiden Punkte A und B für sich umklappen und hätte dann auch AB umgeklappt.

Note. Man konnte aber dieses Mittel anwenden, um die wahre Entfernung der beiden Punkte A und B zu finden, wenn die Projektionen der letztern gegeben sind; eine Aufgabe, welche bereits (§. 266.) auf einem anderen Wege gelöst ist.

§. 273. Aufgabe.

Den Winkel ACB zu construiren, welchen zwei sich schneidende und (durch ihre Projektionen) gegebene Linien AC und BC mit einander machen.

Auflösung 1. Man suche den ersten Grundschnitt V′ der Ebene ABC (nach §. 270.); und klappe die Punkte A, B, C um V′ auf G_1, so hat man das wahre Dreieck ABC in der Grund-Ebene G_1 verzeichnet, daher auch den Winkel ACB.

Auflösung 2. Man finde (nach §. 266.) die wahren Entfernungen AB, AC und BC, construire aus diesen drei Sei-

ten das Dreieck ABC und man hat auch den Winkel ACB construirt.

Anmerkung. Sollte eine ebene und beliebige Figur F gezeichnet werden, von deren Eckpunkten die Projektionen gegeben wären, so dürfte man nur entweder alle Punkte auf eine Zeichen-Ebene umklappen (wie in vorstehender Auflösung 1.), oder man könnte die einzelnen Winkel und die einzelnen Seiten für sich finden und daraus nachher die Figur in eine beliebige Ebene verzeichnen.

§. 274. Aufgabe.

Durch einen Punkt E mit einer Linie AB eine Parallele zu legen; d. h. wenn von E und von AB die Projektionen E_1, E_2 und A_1B_1, A_2B_2 gegeben sind, die Projektionen der durch E mit AB parallel gedachten Linie zu finden.

Auflösung. Man ziehe durch E_1 und E_2 Linien parallel mit A_1B_1 und A_2B_2, so sind diese Linien die gesuchten Projektionen (§. 224. N. 2.).

§. 275. Aufgabe.

Durch eine Linie AB eine Ebene zu legen, welche mit einer andern Linie CD parallel läuft; d. h. wenn von zwei Linien AB und CD, die nicht in einer und derselben Ebene liegen, die Projektionen A_1B_1, C_1D_1 und A_2B_2, C_2D_2 gegeben sind, die Grundschnitte der Ebene zu finden, welche durch AB geht und mit CD parallel läuft.

Auflösung. Man nehme in AB einen Punkt E an (§. 256. N. 5.) und lege durch E (nach §. 274.) eine mit CD parallele Linie EF, so ist BEF die verlangte Ebene. Man suche nun noch (nach §. 270.) die Grundschnitte derselben, in so fern von BE und EF jetzt die Projektionen bekannt sind, — so hat man das Verlangte.

Anmerkung. Würde verlangt: durch zwei gegebene

Punkte A und B eine mit CD parallele Ebene zu legen, — so wäre diese Aufgabe von der vorigen nicht verschieden.

§. 276. Aufgabe.

Durch einen Punkt A mit einer Ebene V eine parallele Ebene zu legen; d. h. wenn von A die Projektionen A_1 und A_2, von V dagegen die Grundschnitte V′ und V″ gegeben sind, — die Grundschnitte der Ebene zu finden, welche durch A hindurchgeht und mit V parallel läuft (Fig. 83.).

Auflösung. Man lege (nach §. 274.) durch A eine mit V″ parallele Linie AB (welche dann nach §. 4. auch mit der Ebene V parallel läuft); suche den Punkt B, wo solche die eine der Grund-Ebenen, z. B. G_1 schneidet, und ziehe durch B mit V′ die parallele Linie BC, welche die Axe G_0 in C trifft; ziehe nachher durch C die mit V″ parallele Linie CD, so sind BC und CD die Grundschnitte der durch A mit V parallel gedachten Ebene.

§. 277. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt E mit zweien gegebenen Linien AB und CD eine parallele Ebene zu legen; d. h. die Grundschnitte dieser letztern Ebene zu finden, wenn von E und von AB und CD die Projektionen gegeben sind.

Auflösung. Liegen AB und CD selbst in einer Ebene, so suche man zuerst (nach §. 270.) die Grundschnitte dieser Ebene und lege dann (nach §. 276.) die mit dieser Ebene parallele Ebene durch E. — Liegen aber AB und CD nicht in einer Ebene, so lege man zuerst durch AB eine Ebene V mit CD parallel (nach §. 275.), und dann durch E eine zweite Ebene mit V parallel (nach §. 276.). — Oder, was noch einfacher ist, man lege bloß durch den gegebenen Punkt E zwei Linien EF und EG bezüglich mit AB und CD parallel (nach §. 274.), so ist die Ebene FEG mit AB und auch mit CD parallel, so

daß man also bloß noch deren Grundschnitte (nach §. 270.) zu verzeichnen hat.

§. 278. Aufgabe.

Durch einen Punkt A auf eine gegebene Ebene V eine senkrechte Linie AB zu ziehen und auch den Punkt B anzugeben, wo solche senkrechte Linie die Ebene V trifft; d. h. während von A die Projektionen A_1 und A_2, und von V die Grundschnitte V′ und V″ gegeben sind, sollen die Projektionen der auf V senkrechten Linie AB, so wie die Projektionen des Punktes B gefunden werden, wo solche die V trifft (Fig. 84.).

Auflösung. Nach (§§. 227. 228.) müssen die Projektionen der senkrechten Linie AB auf den Grundschnitten V′ und V″ senkrecht stehen.

Man ziehe also $A_1\alpha$ auf V′, und $A_2\beta$ auf V″ senkrecht, so sind diese Linien die gesuchten Projektionen von AB.

Es steht aber auch (wenn B den gesuchten Punkt vorstellt, in welchem die V von der auf ihr senkrechten Linie AB getroffen wird) αB senkrecht auf V′; sucht man daher (nach §. 269.) den Punkt γ, wo die AB die Grund-Ebene G_1 trifft, so werden $\alpha B\gamma$ ein bei B rechtwinkliches Dreieck bilden, in welchem $\alpha\gamma$ und der Winkel $\alpha\gamma$B (nach §. 268.) als bekannt angesehen werden können. Macht man daher W. $\alpha\gamma\delta$ = W. $\alpha\gamma$B, und fällt man $\alpha\delta$ senkrecht auf $\gamma\delta$, so ist δ der in der projicirenden Ebene $ABA_1\alpha$ um $A_1\alpha$ auf G_1 geklappte Punkt B. Wird daher δB_1 senkrecht auf $\alpha\gamma$ gezogen, so ist B_1 die Projektion des Punktes B, und die zweite Projektion B_2 wird dann auf die bekannte Weise (§. 256. N. 5.) gefunden.

§. 279. Zusatz.

Wäre V als eine neue Projektions-Ebene mittelst ihrer Grundschnitte V′ und V″ gegeben, und sollte von einem durch seine Projektionen A_1 und A_2 gegebenen Punkte A, die Projektion auf die neue Projektions-Ebene V gesucht werden, so

wäre diese Aufgabe von der vorhergehenden durch gar nichts verschieden, sondern beide wären genau dieselben.

Und da die Projektionen der Endpunkte bekannt sind, so kann man (nach §. 266.) sogleich auch wieder die wahre Länge der neuen Ordinate AB, welche auf der Ebene V senkrecht steht, bestimmen.

§. 280. Zusatz.

Und in der Construktion (§. 278.) ist W. $\gamma\alpha\delta$ = W. $\gamma\alpha$B zugleich der Grund-Winkel von V, d. h. der Neigungs-Winkel, den die Ebenen V und G_1 mit einander machen (nach §. 37. NN. 3. und 4.).

Sollte also der erste Grund-Winkel einer durch ihre Grundschnitte V′ und V″ gegebenen Ebene V construirt werden, so dürfte man nur einen beliebigen Punkt A annehmen (§. 256. N. 5.) und übrigens genau nach (§. 278.) den Winkel $\gamma\alpha\delta$ zeichnen. — Oder man könnte auch bloß AB senkrecht auf V ziehen, den Grund-Winkel der Linie AB finden und von diesem Winkel den Complements-Winkel nehmen, so wäre letzterer ebenfalls der Neigungs-Winkel der Ebenen V und G_1.

Oder man könnte (Fig. 86.) aus einem beliebigen Punkte α in V′ den einen Schenkel $\alpha\beta$ des Neigungs-Winkels (senkrecht auf V′) ziehen und solchen bis zur Grundlinie G_0 (d. h. bis zu β) verlängern. Denkt man sich dann einen Punkt δ im zweiten Grundschnitte V″ senkrecht über β, so ist $\alpha\delta$ der zweite Schenkel des Neigungs-Winkels. Macht man daher $\beta\gamma = \beta\alpha$ und zieht man $\beta\delta$ senkrecht auf G_0, bis solche der V″ begegnet, so ist $\beta\gamma\delta$ der gesuchte Neigungs-Winkel.

§. 281. Zusatz.

Ist umgekehrt der Neigungs-Winkel einer Ebene V gegen die Grund-Ebene G_1 gegeben, und der erste Grundschnitt V′ dazu, und soll der zweite Grundschnitt V″ construirt werden, so errichte man (Fig. 86.) $\alpha\beta$ senkrecht auf V′, mache

$\beta\gamma = \beta\alpha$, errichte $\beta\delta$ senkrecht auf die Axe G_0, mache $\beta\gamma\delta$ gleich dem gegebenen Grund-Winkel und verlängere zuletzt $\beta\delta$ und $\gamma\delta$, bis sie sich in δ schneiden, so ist $V^0\delta$ der zweite Grundschnitt V″.

§. 282. Aufgabe.

Durch eine (mittelst ihrer Projektionen) gegebene Gerade AB eine Ebene V zu legen (d. h. die Grundschnitte V′ und V″ dieser Ebene zu construiren), welche einen gegebenen ersten Grund-Winkel φ hat, d. h. welche mit G_1 den Winkel φ bildet (Fig. 88.).

Auflösung. 1) Ist AB mit G_1 parallel, so ist auch V′ mit AB und mit A_1B_1 parallel. Denkt man sich daher den Neigungs-Winkel construirt, nämlich von A_1 auf V′ eine senkrechte Linie $A_1\beta$, dann $A\beta$ gezogen, wo dann $A\beta A_1$ der Neigungs-Winkel φ seyn muß, und denkt man sich diesen Winkel $A_1\beta A$ um βA_1 auf G_1 geklappt, so wird solcher mit $A_1\beta\alpha$ zusammenfallen, wenn $A_1\alpha = A_1A$ gedacht ist.

Man errichte also auf A_1B_1 von A_1 aus, die Senkrechte $A_1\beta$, mache $A_1\alpha = AA_1 = A_0A_2$, W. $A_1\alpha\beta = 90^0 - \varphi$, verlängere $\alpha\beta$, bis sie mit $A_1\beta$ in β zusammentrifft, ziehe $\beta\gamma$ parallel mit A_1B_1 und $\beta\gamma$ ist dann der gesuchte Grundschnitt V′. — Wird dann (nach §. 269.) der zweite Grundschnitt δ von AB gefunden, so ist $V^0\delta$ der gesuchte zweite Grundschnitt V″.

2) Ist aber AB nicht mit G_1 parallel, so muß man wieder wie vorher das Dreieck $A_1\alpha\beta$ construiren (wo bei A_1 ein rechter Winkel,

$$A_1\alpha = A_1A = A_0A_2 \quad \text{und} \quad \text{W.}\, A_1\alpha\beta = 90^0 - \varphi$$

gemacht ist), dann aber den Punkt C (nach §. 269.) finden, in welchem die AB die erste Grund-Ebene G_1 trifft; aus A_1 als Mittelpunkt mit $A_1\beta$ als Radius eine Kreislinie beschreiben und dann von C aus an solche die Tangente CD ziehen, so ist

CD der gesuchte erste Grundschnitt, zu welchem dann der zweite mittelst des Punktes δ (wie in N. 1.) leicht gefunden werden kann.

Wollte man nämlich den ersten Grund-Winkel dieser gefundenen Ebene CDA im Raume bilden, so müßte man von dem Punkte A in ihr auf G_1 die senkrechte AA_1 fällen, dann von A_1 aus auf CD die senkrechte A_1D ziehen und ADA_1 wäre dann dieser Winkel. Weil aber $AA_1 = A\alpha$, $A_1D = A_1\beta$, und $\mathfrak{W}.\, AA_1D = \mathfrak{W}.\, \alpha A_1\beta = R$ ist, so ist $\triangle AA_1D \cong \triangle \alpha A_1\beta$, also $\mathfrak{W}.\, ADA_1 = \mathfrak{W}.\, \varphi$; welches zu beweisen war.

Anmerkung. Man findet auch jedesmal, wie die Figur zeigt, zwei Auflösungen, was jedoch in der Natur der Aufgabe begründet ist.

§. 283. Aufgabe.

In der ersten Grund-Ebene ist ein Punkt γ gegeben, und außerdem eine Ebene V durch ihre beiden Grundschnitte V′ und V″. Man soll den Punkt γ um V′ auf die Ebene V zurückklappen, d. h. man soll den Punkt A finden (seine Projektionen), welcher, um V′ auf G_1 geklappt, mit γ zusammenfallen würde (Fig. 82.).

Auflösung. Man ziehe $\gamma\alpha$ senkrecht auf V′, so ist $\gamma\alpha$ die Hypothenuse des bei A_1 rechtwinklichen Dreiecks $A_1\alpha A$, während der Winkel $A\alpha A_1$ der Neigungs-Winkel ist von V gegen G_1 und (nach §. 280.) construirt werden kann. Verzeichnet man daher aus $\gamma\alpha = A\alpha$ und $\mathfrak{W}.\, A\alpha A_1 =$ dem ersten Grund-Winkel von V, das rechtwinkliche Dreieck $A\alpha A_1$ irgendwohin, so hat man αA_1 und AA_1, also 1) den Punkt A_1 (der in der Verlängerung von $\gamma\alpha$ liegen muß) und 2) den Punkt A_2, welcher gefunden wird, indem man A_1A_0 senkrecht auf G_0 zieht, und die Verlängerung $A_0A_2 = AA_1$ macht. Man kennt also die beiden Projektionen des gesuchten Punktes A.

§. 284. Zusatz.

Sollte eine in G_1 gegebene gerade Linie $\gamma\delta$ auf eine gege-

bene Ebene V um V′ zurückgeklappt werden, so klappe man (nach §. 283.) zwei ihrer Punkte zurück. Eben so kann ein Winkel oder eine beliebige vieleckige Figur, die in G_1 gegeben ist, um V′ auf V zurückgeklappt werden.

Anmerkung. Und selbst eine krumme Linie, die in G_1 gegeben wäre, könnte man auf eine gegebene Ebene V um V′ zurückklappen, dadurch, daß man so viel ihrer einzelnen Punkte auf V zurückklappte, als man zur Zeichnung derselben für nöthig erachtete.

§. 285. Aufgabe.

In einer (durch ihre Grundschnitte E′ und E″) gegebenen Ebene E ist eine Linie a (durch ihre Projektionen) und in ihr noch ein Punkt α (ebenfalls durch die Projektionen) gegeben. Man soll in E von α aus eine Linie b ziehen, welche mit a den gegebenen Winkel n^0 bildet (ohne Figur).

Auflösung. Man klappe den Punkt α und die Linie a um V′ auf G_1, zeichne daselbst an α und a den Winkel n^0 an, und klappe den zweiten Schenkel b wiederum um V′ auf V zurück (nach §. 284.). [Man braucht aber nur einen einzigen Punkt von ihm (nach §. 283.) zurückzuklappen].

§. 286. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt α auf eine gegebene Linie a eine senkrechte Ebene zu legen; d. h. die Grundschnitte dieser Ebene zu finden, wenn von α und von a die Projektionen bekannt sind (ohne Figur).

Auflösung. Man fälle auf die Projektion a_1 in der Ebene G_1 eine beliebige senkrechte Linie $\gamma\beta$, welche die Axe G_0 in β trifft, ziehe dann $\beta\delta$ wiederum senkrecht auf a_2, so ist $\gamma\beta\delta$ eine auf a senkrechte Ebene. Mit dieser lege man (nach §. 276.) durch den Punkt α eine Ebene E parallel, so ist letztere die verlangte.

§. 287. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt α auf eine gegebene Linie a eine senkrechte Linie zu fällen; d. h. die Projektionen dieser Linie zu finden, wenn von α und a die Projektionen bekannt sind (ohne Figur).

Auflösung. Man fälle (nach §. 286.) von α auf a eine senkrechte Ebene E, und suche den Durchschnittspunkt (P. a, E) nach §. 278. Wird dann von α nach (P. a, E) die gerade Linie gezogen, so ist solche die gesuchte.

§. 288. Aufgabe.

Durch eine gegebene Linie a auf eine gegebene Ebene V eine senkrechte Ebene zu legen; d. h. die Grundschnitte dieser Ebene zu finden, wenn von a die Projektionen und von V die Grundschnitte gegeben sind (ohne Figur).

Auflösung. Man fälle von einem beliebigen Punkte α in a auf die Ebene V eine senkrechte Linie $\alpha\beta$ (nach §. 278.), so ist $a\alpha\beta$ die gesuchte Ebene. Man suche daher noch von letzterer (nach §. 270.) die verlangten Grundschnitte.

§. 289. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie (L. V, W) zweier Ebenen V und W zu finden; d. h. die Projektionen dieser Linie zu finden, wenn von den Ebenen V und W die Grundschnitte V′, V″, W′, W″, gegeben sind.

Auflösungen. Die drei Ebenen V, W und G_1 schneiden sich in drei Durchschnittslinien V′, W′ und (L. V, W), und die (L. V, W) geht also durch den Durchschnittspunkt der Grundschnitte V′ und W′ (oder läuft mit V′ und W′ zugleich parallel, wenn V′ und W′ selbst mit einander parallel seyn sollten).

Ist also (Fig. 80.) C der Durchschnittspunkt der beiden

Grundschnitte V′ und W′, so ist C der Punkt, wo die gesuchte Linie (L. V, W) die Grund-Ebene G_1 trifft. Und ist D der Durchschnittspunkt der Grundschnitte V″ und W″, so ist D der Punkt, in welchem (L. V, W) die zweite Grund-Ebene G_2 trifft. Aus den Punkten C und D, wo die (L. V, W) die Grund-Ebenen trifft, findet man nun die Projektionen $C\beta$ und $D\alpha$ dieser Linie CD oder (L. V, W), wenn man $D\beta$ und $C\alpha$ senkrecht auf die Axe G_0 fällt und dadurch die Punkte β und α sich verschafft.

Ist aber V′ mit W′ parallel, während V″ und W″ in D sich schneiden mögen, so geht die Durchschnittslinie (L. V, W) durch D und mit G_1 parallel; ihre erste Projektion geht also durch β mit V′ und W′ parallel und ihre zweite Projektion durch D mit der Axe G_0 parallel.

Anmerkung 1. Und ist V′ mit W′, zugleich aber auch V″ mit W″, aber nicht mit der Axe parallel, so sind die Ebenen V und W selber mit einander parallel, haben also keine Durchschnittslinie.

Anmerkung 2. Sind aber V′, W′, desgleichen V″ und W″ mit einander und auch mit der Axe G_0 parallel (Fig. 85.), so fälle man $\gamma\beta\alpha\delta\varepsilon$ senkrecht auf die Axe und untersuche, ob $\alpha\beta : \alpha\delta = \alpha\gamma : \alpha\varepsilon$ ist. Findet die Proportion statt, so laufen die Ebenen V und W auch jetzt noch mit einander parallel (§. 230. Anmerkg.). Findet aber diese Proportion nicht statt, so trage man $\alpha\delta$ und $\alpha\varepsilon$ auf der Axe ab, so daß $\alpha\delta_0 = \alpha\delta$, $\alpha\varepsilon_0 = \alpha\varepsilon$ wird, ziehe $\beta\delta_0$, $\gamma\varepsilon_0$, bis sie sich in D schneiden, fälle DD_1 und DF senkrecht auf $\gamma\alpha$ und G_0, so ist DD_1 die erste und DF die zweite Ordinate irgend eines Punktes der gesuchten Durchschnittslinie, woraus, wenn $\alpha D_2 = \alpha F$ gemacht wird, D_1 und D_2 als die Projektionen dieses Punktes D hervorgehen. Zieht man nachgehends D_2q mit der Axe G_0 parallel, so sind D_1D und D_2q die beiden Projektionen der gesuchten Durchschnittsline (L. V, W), in diesem Falle.

Es erhellet aber diese Construktion, sobald man sich durch α auf die Axe G_0 eine Ebene senkrecht gelegt denkt, welche die Grund-Ebenen in den Linien $\alpha\gamma$, $\alpha\varepsilon$, dagegen die V in der Linie $\gamma\varepsilon$ und die W in der Linie $\beta\delta$ schneidet, so daß, wenn man sich das bei α rechtwinkliche Dreieck $\gamma\alpha\varepsilon$, um $\gamma\alpha$ gedreht und in die Ebene G_1 gelegt denkt, die Figur $\gamma\beta\alpha\delta_0\varepsilon_0$ entstehen wird, wo $\gamma\varepsilon_0$ und $\beta\delta_0$ die Durchschnittslinien der Ebenen V und W mit der $\gamma\alpha\varepsilon$, ihrer gegenseitigen Lage nach, repräsentiren. Der Punkt D, wo sich nun $\gamma\varepsilon_0$ und $\beta\delta_0$ schneiden, ist offenbar ein Punkt der gesuchten Durchschnittslinie und DD_1 sein Abstand von G_1, so wie DE sein Abstand von G_2. Das Uebrige folgt aus §. 256.

§. 290. Zusatz.

Sollten die Projektionen des Durchschnittspunktes (P. U, V, W) dreier (durch ihre Grundschnitte) gegebenen Ebenen U, V und W gefunden werden, so müßte man zuerst (nach §. 289.) die Projektionen zweier der drei Durchschnittslinien (L. U, V), (L. U, W) oder (L. V, W) finden und die Durchschnittspunkte dieser Projektionen wären dann auch die Projektionen des Punktes (P. U, V, W).

§. 291. Zusatz.

Hierher gehört auch die Aufgabe, wo der Durschnittspunkt α einer Linie a mit einer Ebene V gefunden werden soll. Man hat nämlich die drei Ebenen (Eb. a, a_1), (Eb. a, a_2) und V, und den Durchschnittspunkt α derselben zu bestimmen.

Und wollte man den Neigungs-Winkel von a gegen V zeichnen, so würde man, aus β in a die Linie $\beta\gamma$ senkrecht auf V fällen, den Punkt γ finden und aus den drei bekannten Punkten α, β und γ (nach §. 273.) das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, also auch den Neigungs-Winkel $\beta\alpha\gamma$ construiren.

§. 292. Aufgabe.

Den Neigungs-Winkel zu zeichnen, den zwei sich schneidende Ebenen V und W mit einander bilden und zwar ihn selber, nicht seine Projektionen (ohne Figur).

Auflösung 1. Man suche (nach §. 288.) die Durch-

schnittslinie (L. V, W), nehme in ihr einen beliebigen Punkt α an, und errichte von α aus (nach §. 279.), auf jede der Ebenen V und W senkrechte Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$, und finde aus den Projektionen dieser letztern Linien (nach §. 273.) den wahren Winkel $\beta\alpha\gamma$, so ist solcher dem gesuchten Neigungs-Winkel gleich (nach §. 26.).

Auflösung 2. Man nehme in der Durchschnittslinie (L. V, W) einen beliebigen Punkt α an und errichte (nach §. 286.) durch α auf (L. V, W) eine senkrechte Ebene U, suche (nach §. 289.) die Durchschnittslinien (L. V, U) und (L. W, U), so sind dies die Schenkel des gesuchten Neigungs-Winkels, dessen wahre Größe dann vollends (nach §. 273.) gezeichnet wird.

§. 293. Zusatz.

Wäre umgekehrt die Aufgabe gegeben: In einer durch ihre Grundschnitte gegebenen Ebene V, ist durch ihre Projektionen eine Linie $\varepsilon\zeta$ (oder L. V, W) gegeben; man soll die Grundschnitte einer zweiten Ebene W zeichnen, welche die gegebene V in $\varepsilon\zeta$ schneidet, und mit V einen gegebenen Neigungs-Winkel $=\varphi$ bildet; — so müßte man abermals in $\varepsilon\zeta$ einen beliebigen Punkt α annehmen, durch ihn auf $\varepsilon\zeta$ eine senkrechte Ebene U legen, die Durchschnittslinie (L. V, U) suchen und dann (nach §. 285.) in U eine Line $\alpha\vartheta$ finden, welche mit (L. V, U) den Winkel φ bildet; — und $\alpha\varepsilon$ und $\alpha\vartheta$ bilden dann die gesuchte Ebene W mit einander, deren Grundschnitte daher (nach §. 270.) vollends gefunden werden können.

§. 294. Zusatz.

Wäre aber die Linie $\varepsilon\zeta$, durch welche eine Ebene W so gelegt werden soll, daß sie mit einer gegebenen Ebene V einen gegebenen Winkel φ macht, nicht in V selber, sondern außerhalb V, übrigens durch ihre Projektionen gegeben, so müßte durch $\varepsilon\zeta$ eine zweite Ebene U gelegt werden senkrecht auf V (nach §. 288.), und dann könnten V und U als neue Coordina-

ten-Ebenen genommen, und die Projektionen von $\varepsilon\zeta$ auf letztere (nach §. 279.) bestimmt werden. Wie dann durch $\varepsilon\zeta$ eine Ebene W gelegt wird, welche mit der neuen Grund-Ebene V einen gegebenen Winkel bildet, ist im §. 282. bereits gezeigt worden, nur daß man vermöge der Construktion, die Grundschnitte von W mit den neuen Grund-Ebenen V und U erhält, während die mit den alten Grund-Ebenen G_1 und G_2 gesucht werden. Man muß daher noch aus den nun bekannten Linien (L. V, W) und (L. U, W) ihre Projektionen auf G_1 und G_2 und daraus wieder die Grundschnitte der Ebene W mit G_1 und G_2 (nach §. 270.) vollends construiren.

§. 295. Aufgabe.

Es ist eine Ebene V gegeben, eine zweite Ebene U und in letzterer ein Punkt α. Man soll die Punkte β, γ in V angeben, wo eine aus α als Mittelpunkt in der Ebene U mit dem Radius r beschriebene Kreislinie die Ebene V treffen wird.

Auflösung. Man suche die Durchschnittslinie (L. U, V) (nach §. 289.) so hat man die Richtung der Sehne. Wird dann aus α auf sie, d. h. auf (L. U, V), eine senkrechte Linie $\alpha\zeta$ gefällt (nach §. 287.), so ist ζ der Mittelpunkt der Sehne. Construirt man nachgehends mit dem Radius r als Hypothenuse und der Länge $\alpha\zeta$ als Kathete ein rechtwinkliches Dreieck irgend wohin, so erhält man als zweite Kathete die Länge der halben Sehne $\beta\zeta$ oder $\gamma\zeta$. Wird daher zuletzt diese Länge von ζ aus in der Richtung der Sehne (L. U, V) abgetragen (nach §. 267.), so finden sich die verlangten Endpunkte β und γ der Sehne.

§. 296. Aufgabe.

In der ersten Grund-Ebene G_1 sind zwei gerade Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ gegeben, die erstere, als der Grundschnitt einer Ebene V, welche mit der Grund-Ebene G_1 einen gegebenen Winkel ψ bilden soll; man soll durch α in V eine Gerade ziehen (d. h.

die Projektionen dieser Linie angeben), welche mit der andern gegebenen Geraden $\alpha\gamma$ einen zweiten gegebenen Winkel φ bildet (Fig. 87.).

Auflösung. Man nehme zur zweiten Grund-Ebene G_2 diejenige, welche eine auf $\alpha\beta$ senkrechte Axe G_0 bildet, mache W. $\varepsilon\beta\delta = \psi$, so ist $\beta\delta$ der zweite Grundschnitt V'' von V. Wird dann W. $\gamma\alpha\varepsilon = \varphi$ gemacht, und um $\gamma\alpha$ als Axe herumgedreht gedacht, so beschreibt $\alpha\varepsilon$ eine Kegelfläche, und wo diese die Ebene V trifft, da ist die gesuchte Linie. Zieht man daher $\varepsilon\gamma$ senkrecht auf $\alpha\gamma$, so wird $\gamma\varepsilon$ bei dem Herumdrehen um $\alpha\gamma$ eine Kreisfläche beschreiben, senkrecht auf $\alpha\gamma$, welche von der Ebene V in einer Sehne BC geschnitten wird, deren jeder Endpunkt B oder C ein Punkt der gesuchten Linien αB oder αC ist, und nach dem nächst vorhergehenden §. 295. gefunden wird.

Note. Der Natur der Aufgabe gemäß wird man in der Regel zwei Auflösungen erhalten.

§. 297. Zusatz.

Wäre dieselbe Aufgabe allgemeiner so gestellt worden, daß in Bezug auf zwei beliebige Grund-Ebenen G_1 und G_2, die Grundschnitte einer Ebene V, und von einer sie schneidenden Linie l die Projektionen gegeben wären, und nun die Projektionen einer ganz in der Ebene V liegenden Linie λ gesucht werden sollen, welche durch den Durchschnittspunkt (P. l, V) der l und der V hindurchgeht und mit l einen gegebenen Winkel φ bildet, — so müßte man zuerst durch l eine beliebige Ebene W legen, und die Durchschnittslinie derselben (L. W, V) mit der gegebenen Ebene V suchen, und den Winkel ψ, welchen V mit W macht. Dann würde man W als neue Grund-Ebene G'_1 nehmen und (L. V, W) und l wären dann (Fig. 87.) die Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$, und die zweite neue Grund-Ebene G'_2 könnte dann abermals so genommen werden, daß die neue Axe G'_0 senkrecht auf $\alpha\beta$ steht. — Hätte man aber hernach von αB oder αC, d. h. von der gesuchten Linie λ die Projektionen auf diese neuen

G'_1 und G'_2, d. h. auf W und auf die durch $\beta\varepsilon$ mit W senkrecht gelegte Ebene gefunden, so müßte man aus diesen Projektionen die andern finden, derselben Linie αB oder αC oder λ, auf die alten Grund-Ebenen G_1 und G_2.

Um aber letztere Projektionen zu finden, suche man vor allen Dingen die Grundschnitte mit G_1 und G_2 der auf (L. V, W) senkrechten G'_2 (nach §. 286.); denke sich durch die Projektionen von λ in G'_1 und G'_2, auf letztere Ebenen senkrechte Ebenen gelegt (nach §. 288.), und dann die Projektionen ihrer Durchschnittslinie λ (nach §. 289.) gefunden, so sind diese die verlangten.

§. 298. Aufgabe.

Zwischen zwei durch ihre Projektionen gegebenen, nicht in einer Ebene liegenden Linien a und b die kürzeste Entfernung zu finden (welche immer auf beiden gegebenen Linien zugleich senkrecht steht).

Auflösung. Man lege durch a eine Ebene V mit b parallel (nach §. 275.); dann durch b eine Ebene W senkrecht auf V (nach §. 278.); bestimme hernach den Durchschnittspunkt (P. W, a) oder α (nach §. 291.), und errichte zuletzt aus ihm auf die erste Ebene V eine senkrechte Linie $\alpha\beta$, welche ganz in W liegt und die b in β schneiden mag, so ist diese Linie $\alpha\beta$ die verlangte kürzeste Entfernung der Linien a und b von einander.

§. 299. Aufgabe.

Von einem körperlichen Dreieck sind die drei Seiten (Linien-Winkel) a, b und c gegeben. Man soll, unter der Voraussetzung, daß BD, DC in G_1 (Fig. 89.) die zwei ersten Kanten sind, die Projektionen der dritten Kante DA finden und noch die Winkel B und C an den Kanten BD und DC.

Auflösung. Man denke sich AA_1 senkrecht auf G_1, d. h. auf die Ebene BDC, so kömmt zunächst alles darauf an,

A_1 zu finden. Denkt man sich ferner DA und A um DC auf die Ebene G_1 geklappt, und eben so DA und A um DB, so daß A′ und A″ diesen umgeklappten Punkt A jedesmal vorstellen, so wird $CDA' = b$ und $BDA'' = c$; und A_1CA' so wie A_1BA'' stehen bezüglich auf CD und BD senkrecht. Um daher A_1 zu finden, trage man die gegebenen Seiten b und c an CD und BD an, mache $DA' = DA''$ beliebig lang, fälle A′C und A″B senkrecht auf CD und BD und verlängere sie, bis sie sich schneiden, so ist der Durchschnittspunkt die gesuchte Projektion A_1 eines beliebigen Punktes A in der dritten Kante DA, und DA_1 die Projektion der dritten Kante DA selbst. Beschreibt man nun aus A_1C als Kathete und $A'C = \alpha C$ als Hypothenuse ein rechtwinkliches Dreieck $A_1\alpha C$, so ist solches congruent dem Dreiecke A_1AC; also ist die zweite Kathete desselben Dreiecks $\alpha A_1 = AA_1 = A_0A_2$, wodurch sich die zweite Projektion A_2 des Punktes A bestimmt; und fällt man dann DD_0 senkrecht auf die Axe G_0, so ist D_0A_2 die zweite Projektion der Kante DA. Endlich ist $W.\alpha CA_1 = W.ACA_1$ der Neigungs-Winkel C; und um den Neigungs-Winkel B zu haben, darf man nur noch aus BA_1 als Kathete und BA″ als Hypothenuse, das rechtwinkliche Dreieck $BA_1\alpha' \cong \Delta BA_1A$ construiren und $W.\alpha'BA_1$ wird dieser Neigungs-Winkel B seyn.

Und da man endlich aus den Projektionen des Punktes A und den Linien DB, DC (nach §. 270.) die Grundschnitte der Ebenen DBA, DCA construiren kann, so läßt sich dann auch (nach §. 292.) der dritte Winkel A finden.

Anmerkung. Die Zeichnung der rechten Winkel bei A, wird sich der praktische Zeichner noch dadurch ersparen, daß er die rechten Winkel bei B oder C zu demselben Zwecke benutzt.

§. 300. Aufgabe.

Von einem körperlichen Dreieck sind gegeben zwei Seiten

a und b und der eingeschlossene Winkel C. Man soll die übrigen Winkel und die dritte Seite durch Construktion finden (Fig. 89.).

Auflösung. Man trage CDA′=b neben CDB=a in G_1 hin, fälle von einem beliebigen Punkte A′ auf CD die Senkrechte A′C; construire aus A′C als Hypothenuse und dem gegebenen Winkel C ein rechtwinkliches Dreieck A′Cβ, mache in der Verlängerung von A′C, $CA_1=C\beta$, so ist A_1 die erste Projektion eines Punktes A in der dritten Kante DA, und $A'\beta=AA_1=A_0A_2$ giebt dann die zweite Projektion von A, so daß DA_1 und D_0A_2 die beiden Projektionen von DA seyn werden. Wird dann A_1B senkrecht auf DB gefällt und verlängert, bis $BA''=B\alpha'$ wird, während das bei A_1 rechtwinkliche Dreieck $BA_1\alpha'$, aus BA_1 und $A_1\alpha'=A'\beta=AA_1$ construirt worden ist, so ist BDA″ die verlangte dritte Seite c. — Und die übrigen Winkel würden dann nach dem vorhergehenden Paragraphen gefunden, wenn nicht schon $\alpha'BA_1=B$ wäre.

§. 301. Aufgabe.

Aus zweien gegebenen Winkeln B und C und der dazwischen liegenden Seite a, das körperliche Dreieck zu construiren (Fig. 89.).

Auflösung. Während in G_1, BDC=a genommen wird, denke man sich von einem beliebigen Punkte C aus, eine Senkrechte CA′ auf CD errichtet, W. A′Cε=W. C genommen und aus einem beliebigen Punkte ε die auf εC Senkrechte εζ errichtet, bis sie CA′ in ζ trifft. Eben so nehme man in BD einen beliebigen Punkt E an, errichte EH senkrecht auf DE, mache EF=εζ und W. HEK=W. B, ziehe FK, KH, parallel mit EH und EF, mache Cγ=Cε, ziehe γδ parallel mit CD, bis sie die verlängerte KH in δ trifft, so ist Dδ die Projektion der Kante DA auf G_1. Verlängert man Dδ, bis

sie A'C in A_1 schneidet, zieht A_1B senkrecht auf BD, construirt $A_1\alpha'$ parallel mit DB, macht W. $A_1B\alpha' =$ W. B, dann $BA'' = B\alpha'$, und zieht DA'', so ist W. BDA'' = der gesuchten Seite c. Beschreibt man zuletzt mit DA'' aus D einen Kreisbogen, welcher die CA' etwa in A' trifft, so ist CDA' die andere gesuchte Seite b.

Anmerkung. Man könnte auch aus den gegebenen Stücken das Ergänzungs-Dreieck construiren (nach §. 300.) und in diesem die Neben-Winkel der Winkel und Seiten, als die gesuchten Seiten und Winkel nehmen.

§. 302. Aufgabe.

Es sind von einem körperlichen Dreiecke alle drei Winkel A, B und C gegeben; man soll die drei Seiten finden.

Auflösung. Man nehme von A, B, C die Neben-Winkel, bezeichne solche durch a', b' und c' und construire (nach §. 288.) ein körperliches Dreieck, welches a', b' und c' zu Seiten hat. Dieses ist das Ergänzungs-Dreieck. — Sind aber die Winkel dieses neuen körperlichen Dreiecks durch Construktion gefunden und durch A', B', C' vorgestellt, so nehme man davon die Neben-Winkel und diese sind dann die gesuchten Seiten a, b und c.

§. 303. Aufgabe.

Aus zweien Seiten a und b und dem Winkel B, welcher der Seite B gegenüber liegt, das körperliche Dreieck zu construiren (Fig. 90.).

Auflösung. Man denke sich die Seite a dergestalt in G_1 construirt, daß die eine Kante BB senkrecht auf die Axe G_0 zu liegen kommt, mache dann W. CBE = dem gegebenen Winkel B, so ist DBE die Lage der dritten Seite c (d. h. der Ebene derselben). Wird nun CDA' = b gemacht und dann um CD herumbewegt gedacht, so wird endlich die Linie DA' mit

der Ebene DBE zusammenfallen, und das körperliche Dreieck ist völlig construirt. Zieht man aber A'H senkrecht auf DC, so wird A'H bei dem Herumbewegen um H als Mittelpunkt eine Kreislinie beschreiben; und wo solche die Ebene DBE trifft, da liegt ein Punkt A der dritten Kante, so daß dadurch die dritte Kante DA selbst, ihrer Lage nach völlig bestimmt ist. Diese Durchschnittspunkte werden aber nach §. 295. gefunden; und es kann jeder derselben ein Punkt der dritten Kante DA seyn, wenn nicht etwa einer davon unterhalb G_1 fällt, in welchem Falle dann aus den drei gegebenen Stücken nur ein einziges Dreieck möglich ist.

§. 304. Aufgabe.

Aus zweien Winkeln B und A und einer Seite a, welche dem gegebenen Winkel A gegenüber liegt, ein körperliches Dreieck zu construiren.

Auflösung. Man nehme von B, A und a die Neben-Winkel, bezeichne solche in der Ordnung durch b', a' und A', construire (nach §. 303.) aus b', a' als Seiten und A' als dem der Seite a' gegenüberliegenden Winkel ein körperliches Dreieck, nehme von den Winkeln B', C' und der Seite c' desselben die Neben-Winkel, so sind solche in der Reihe die gesuchten Seiten b, c und der gesuchte Winkel C.

Schluß-Anmerkung.

Obgleich nun auch körperliche Vielecke, überhaupt beliebige ebene Körper, aus den sie bestimmenden Stücken zu verzeichnen, verlangt werden kann, so wollen wir uns doch hier mit dem begnügen, was in dem vorstehenden Kapitel über die Construktion der ebenen und geradlinigen Figuren im Raume gesagt worden ist. Manches davon ist noch sehr zu vervollständigen. So z. B. wird der Leser leicht bemerken, daß in den letztern Aufgaben, die Construktion körperlicher Dreiecke betreffend, diese Construktionen meist stillschweigend nur für den Fall angegeben sind, daß die vorkommenden Winkel aller Art spitze Winkel sind. Wer jedoch den Gang für diesen

Fall zu verfolgen nicht unfähig ist, wird gewiß auch leicht für jede andere Voraussetzung dieselbe Construktion abändern und dem jedesmal Gegebenen anpassen können.

Uebrigens reicht das hier Vorgetragene aus, um die verwickelsten Construktionen des so genannten Steinschnitts jedesmal selbstthätig ausführen zu können, so lange solcher nicht krumme Flächen aufnimmt. Für diesen letztern Fall dagegen sollen die beiden nächsten Kapitel die wichtigsten Momente enthalten.

Beschreibende Geometrie.

Zweites Kapitel.

Construktionen krummer Durschnittslinien *).

§. 305. Aufgabe.

Von einem Cylinder C ist die Richtungslinie r und die Erzeugungslinie l gegeben. Man soll den Grundschnitt C′ desselben finden.

Auflösung. Man nehme (nach §. 256. N. 5.) in der Richtungslinie r einen beliebigen Punkt α an, lege durch α eine mit der gegebenen Erzeugungslinie l parallele Linie a (nach §. 274.), suche (nach §. 269.) die Grundschnitte a′ und a″, so ist a′ ein Punkt des gesuchten Grundschnittes C′, so wie a″ ein Punkt des andern Grundschnittes C″. — Für jeden andern Punkt α in r bekommt man dann auf demselben Wege auch einen andern Punkt a′.

*) Weil wir nach und nach aufhören, Figuren zur Versinnlichung zu Hülfe zu nehmen, so ist hier besonders wohl auf die Bezeichnung zu achten, welche im §. 264. der Einleitung festgesetzt worden ist.

§. 306. Aufgabe.

Die Grundschnitte K′, K″ eines Kegels K zu finden, wenn seine Richtungslinie r und seine Spitze α (durch ihre Projektionen) gegeben sind.

Auflösung. Durch die Spitze α und einen beliebigen Punkt (§. 256. N. 5.) β in r lege man die Linie b und suche (nach §. 269.) ihre Grundschnitte b′ und b″, so sind solche als Punkte der Grundschnitte K′ und K″ anzusehen, deren man sich auf demselben Wege beliebig viele verschaffen kann.

Anmerkung. In dem Folgenden werden wir uns daher einen Cylinder und einen Kegel allemal durch seinen Grundschnitt und durch seine Erzeugungslinie oder seine Spitze gegeben denken, weil, wenn statt des Grundschnittes die Richtungslinie gegeben seyn sollte, ersterer, doch dem Vorstehenden zu Folge, sogleich gefunden werden könnte.

§. 307. Aufgabe.

Von einem windschiefen Cylinder W sind die Parallel-Ebene P und die beiden Richtungslinien a und b gegeben. Man soll durch einen beliebigen Punkt α in a eine Seite (gerade Linie) desselben verzeichnen.

Auflösung. Man lege durch α (nach §. 276.) eine Ebene A parallel mit P und suche den Punkt β, wo solche die zweite Richtungslinie b trifft. Legt man dann durch α und β die gerade Linie $\alpha\beta$, so ist solche die verlangte Erzeugungslinie.

Anmerkung. Damit aber die Durchschnitts-Punkte der Ebene A mit der Richtungslinie b, wenn letztere eine krumme Linie ist, leicht gefunden werden mögen, muß man sich vorher neue Grund-Ebenen denken G'_1 und G'_2, welche senkrecht auf P stehen. Denn dann steht A senkrecht auf G'_1 und G'_2 und die Projektionen des Durchschnittspunktes β liegen daher

dann in den Grundschnitten A′ oder A″ und in den Projektionen b_1 oder b_2, so daß β_1 als Durchschnittspunkt von b_1 und A′, — β_2 dagegen als Durchschnittspunkt von b_2 und A″ sich ergiebt. — Nachgehends, wenn es verlangt wird, muß man alles wieder auf die alten Grund-Ebenen zurückführen.

Aus diesem Grunde denkt man sich bei allen Construktionen, wo eine solche Erzeugungslinie erforderlich ist, die Parallel-Ebene P senkrecht auf den Grund-Ebenen, d. h. letztere senkrecht auf der erstern.

§. 308. Aufgabe.

Eine windschiefe Ebene V ist durch ihre beiden Richtungslinien a und b und durch ihre Parallel-Ebene P gegeben; in ihr noch ein Punkt α; man soll durch α eine Querseite der windschiefen Ebene construiren.

Auflösung. Da die Querseite allemal auch eine gerade Linie ist, so bedarf es außer des Punktes α nur noch eines zweiten Punktes in ihr. Man lege demnach durch α eine mit a und b parallele Ebene E (nach §. 277.), nehme in a einen beliebigen Punkt γ an, lege durch ihn (nach §. 307.) eine Seite c der windschiefen Ebene, suche den Durchschnittspunkt (P. c, E) oder β, und ziehe zuletzt $\alpha\beta$, so ist dies die gesuchte Querseite (nach §. 265. R. 6.).

§. 309. Aufgabe.

Es ist gegeben ein windschiefer Cylinder W durch seine Richtungslinien a und b und durch seine Parallel-Ebene P; außerdem noch eine Ebene V; man soll die Durchschnittslinie (L. V, W), d. h. die in V liegende ebene Richtungslinie des windschiefen Cylinders W construiren.

Auflösung. Man nehme in a einen beliebigen Punkt α an, lege durch ihn (nach §. 307.) die Seite $\alpha\beta$ des windschiefen Cylinders W, suche deren Durchschnittspunkt γ (nach

§. 291.) mit der Ebene V, und γ ist ein Punkt der gesuchten Curve.

Dasselbe Verfahren für mehrere beliebige Punkte α wiederholt, giebt beliebig viel Punkte der gesuchten, in V liegenden ebenen Richtungslinie.

Anmerkung. Ist V mit G_2 parallel, und steht P auf G_1 senkrecht, wie dies gewöhnlich angenommen wird, so vereinfacht sich das Verfahren noch etwas.

§. 310. Aufgabe.

Es ist alles wie im §. 309. gegeben, nur statt der Ebene V eine Linie l. Man soll (P. W, l) finden.

Auflösung. Man lege durch l eine beliebige Ebene V, suche die Durchschnittslinie (L. W, V) (nach §. 309.), und dann die Durchschnittspunkte der letztern mit der gegebenen Linie l.

Anmerkung. Gewöhnlich legt man V senkrecht auf G_1, besonders wenn P senkrecht auf G_1 gedacht ist.

§. 311. Aufgabe.

Es sind von einer Umdrehungs-Fläche F die Umdrehungs-Axe a und ihre Erzeugungslinie l (die Linien alle durch ihre Projektionen) gegeben. Man soll eine Meridianlinie (d. h. die ebene Erzeugungslinie) finden.

Auflösung. Man lege durch einen in I (nach §. 256. N. 5.) beliebig angenommenen Punkt λ eine Ebene E senkrecht auf a (nach §. 286.), und durch a selbst eine beliebige Ebene A; suche (nach §. 278.) den Durchschnittspunkt (P. a, E) oder α, und die Entfernung $\alpha\lambda$ (nach §. 266.), endlich die Durchschnittslinie (L. A, E) (nach §. 289.) und trage zuletzt in letzterer, von α oder (P. a, E) aus, die Linie $\alpha\lambda$ ab (nach §. 267.), so ist der Endpunkt ein Punkt der in A liegenden Meridianlinie.

Dasselbe Verfahren für beliebig viele Punkte λ wiederholt, giebt beliebig viele Punkte der gesuchten in A liegenden Meridianlinie, oder der in A liegenden ebenen Erzeugungslinie.

Anmerkung. Wird, wie solches gewöhnlich angenommen ist, die Umdrehungs-Axe senkrecht auf der ersten Grund-Ebene G_1 gedacht, so kann man die ebene Erzeugungslinie parallel mit G_2 nehmen (so also daß A mit G_2 parallel läuft), und das Verfahren vereinfacht sich dadurch noch etwas.

§. 312. Aufgabe.

Von einem Cylinder C ist die Richtungslinie r und die Erzeugungslinie l gegeben (durch ihre Projektionen), außerdem noch eine gerade Linie a (d. h. a_1 und a_2); man soll die Durchschnittspunkte des Cylinders C mit a finden, d. h. die Punkte (P. C, a).

Auflösung. Man lege durch a mit l eine parallele Ebene A (nach §. 275.), und suche den Grundschnitt C′ des Cylinders (nach §. 305.). Durch den Punkt b′, wo die Grundschnitte A′ und C′ sich treffen, lege man (nach §. 274.) eine Linie b mit l parallel, so liegt b ganz in A, so wie auch a, und der (nach §. 256. N. 7.) gefundene Durchschnittspunkt (P. a, b) ist der gesuchte.

Anmerkung 1. Weil aber mehrere Punkte b sich ergeben können, so giebt es dann auch mehrere Durchschnittspunkte.

Anmerkung 2. Schnitten sich a und l selbst, so wäre dieser Durchschnitt zugleich einer der gesuchten. Und wo (Eb. a, l) den Grundschnitt C′ trifft, da ergiebt sich wiederum eine Seite des Cylinders, welche die a schneidet.

§. 313. Aufgabe.

Es ist ein Cylinder C durch die Projektionen seiner Richtungslinie r und seiner Erzeugungslinie l gegeben; und noch eine

Ebene V (durch ihre Grundschnitte); man soll die Durchschnittslinie (L. C, V) construiren.

Auflösung. Man construire (nach §. 305.) den Grundschnitt C' des Cylinders, lege durch einen beliebigen Punkt a' desselben eine Seite a des Cylinders (parallel mit l) und suche (nach §. 291.) den Durchschnittspunkt (P. a, V), so ist solcher ein Punkt der gesuchten (L. C, V). — Wird also das Verfahren beliebig wiederholt, so bekommt man beliebig viele Punkte der Durchschnittslinie (L. C, V).

Anmerkung. Ist in den beiden letztern Aufgaben die Richtungslinie r nicht gegeben, dagegen der Grundschnitt C', so ist die Auflösung noch kürzer, weil der Grundschnitt dann nicht noch construirt zu werden braucht.

§. 314. Aufgabe.

Es ist ein Kegel K gegeben durch seinen ersten Grundschnitt K' und seine Spitze α (letztere wieder durch ihre Projektionen); man soll die Punkte finden, in denen eine gegebene gerade Linie a den Kegel schneidet.

Auflösung. Man lege durch α und a (nach §. 270.) eine Ebene (Eb. α, a) oder U, nehme den Durchschnittspunkt β des ersten Grundschnittes U' mit K', ziehe die Seite $\beta\alpha$, und wo letztere die a schneidet, da ist der gesuchte Durschnittspunkt.

Anmerkung. Wäre vom Kegel statt seines Grundschnittes K', seine Richtungslinie gegeben gewesen, so hätte man (nach §. 297.) erst seinen Grundschnitt K' suchen müssen.

§. 315. Aufgabe.

Es ist von einem Kegel K gegeben sein erster Grundschnitt K' und seine Spitze α, außerdem noch eine Ebene V; man soll die Durchschnittslinie (L. V, K) finden.

Auflösung. Durch die Spitze α und einen Punkt b' des Grundschnittes, lege man die Linie b oder αb' und bestimme (nach §. 291.) den Punkt, wo solche die Ebene V trifft, so ist solcher Punkt (P. b, V) ein Punkt der gesuchten (L. V, K).

Auf demselben Wege verschafft man sich hernach beliebig viele andere Punkte.

Anmerkung. Wäre nicht der Grundschnitt des Kegels, sondern nur seine Richtungslinie gegeben, so müßte man aus letzterer den Grundschnitt erst construiren, um die hier gegebenen Stücke zu haben.

§. 316. Aufgabe.

Von einer Umdrehungs-Fläche ist die Umdrehungs-Axe a und die ebene Erzeugungslinie l gegeben; man soll ihre Durchschnittslinie mit einer gegebenen Ebene V finden.

Auflösung. Durch einen beliebigen Punkt α in l lege man eine Ebene U senkrecht auf die Axe, und bestimme den Durchschnittspunkt (P. a, U). Dann suche man die Durchschnittspunkte der, aus (P. a, U) als Mittelpunkt, mit der Entfernung zwischen (P. a, U) und α als Radius, in U construirten Kreislinie, mit der Ebene V (nach §. 295.), so sind solche auch Punkte der gesuchten Durchschnittslinie. — Auf demselben Wege verschafft man sich aber beliebig viele Punkte dieser gesuchten Durchschnittslinie.

Anmerkung. Diese Construktion würde also auch angewandt, wenn von einer Kugel bloß ihr Mittelpunkt μ und ihr Radius r gegeben wäre und die Durchschnittslinie derselben mit einer Ebene gesucht werden sollte, weil a dann beliebig durch μ gehend angenommen werden dürfte, und l eine aus μ mit r construirte Kreislinie wäre, die man sich noch, der größern Bequemlichkeit wegen, mit G_2 parallel denken könnte, während auch a auf G_1 senkrecht genommen werden kann.

§. 317. Aufgabe.

Von einer Umdrehungs-Fläche ist wiederum a und l gegeben, wie im vorhergehenden §. 316.; man soll die Durchschnittspunkte derselben mit einer gegebenen Linie b finden.

Auflösung. Man lege durch b eine beliebige Ebene E, und suche die Durchschnittslinie dieser Ebene E mit der gegebenen Umdrehungs-Fläche (nach §. 316.). Wo dann diese letztere Curve und die Linie b sich treffen, da sind die gesuchten Punkte.

Note. Da die Ebene E beliebig durch b gelegt werden kann, so pflegt man sie gewöhnlich senkrecht auf G_1 zu legen, besonders wenn auch a senkrecht auf G_1 gedacht ist.

Anmerkung. Dies ist wiederum auf die Kugel anwendbar. Und beide letzteren Construktionen können auch auf senkrechte Cylinder oder senkrechte Kegel angewandt werden, in so fern diese ebenfalls Umdrehungs-Flächen sind.

§. 318. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie zweier durch ihre Grundschnitte C′ und K′ und durch ihre Erzeugungslinien l und n gegebenen Cylinder C und K zu finden.

Auflösung. Man lege durch eine der Erzeugungslinien l eine Ebene A parallel mit der andern Erzeugungslinie n. Durch die Punkte b′ und d′, in welchen die Grundschnitte A′ und C′, eben so A′ und K′ sich schneiden, lege man die Linie b parallel mit l, und die Linie d parallel mit n, so liegen b und d zugleich in der Ebene A, während b eine Seite des Cylinders C, und d eine Seite des Cylinders K ist. Wo sich nun die Linien b und d schneiden, da liegt ein Punkt der gesuchten Durchschnittslinie, deren man auf demselben Wege in beliebiger Anzahl finden kann.

§. 319. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie eines Cylinders C mit einem Kegel

K zu construiren, wenn von C der Grundschnitt C′ und die Erzeugungslinie l, vom Kegel K dagegen der Grundschnitt K′ und die Spitze α gegeben sind.

Auflösung. Man lege durch die Spitze des Kegels α eine Linie a parallel mit der Erzeugungslinie l, und bilde sich eine beliebige Seite b des Kegels K. Dann suche man die Durchschnittspunkte b′ und d′ des ersten Grundschnittes der durch a und b bestimmten Ebene (Eb. a, b) mit den Grundschnitten C′ und K′, und lege durch ersteren b′ eine Seite b des Cylinders, durch letzteren d′ dagegen eine Seite d des Kegels. Wo nun b und d sich schneiden, da ist ein Punkt der gesuchten Durchschnitts-Curve (L. C, K).

§. 320. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie eines Cylinders C und einer Umdrehungs-Fläche F zu finden, wenn von ersterem der Grundschnitt C′ und die Erzeugungslinie l, von letzterer dagegen die Umdrehungs-Axe a und die ebene Erzeugungs-Curve k gegeben sind.

Auflösung. Man legt durch die Umdrehungs-Fläche eine Ebene V senkrecht auf die Axe und construirt den Parallel-Kreis v, der als Durchschnitts-Figur sich ergiebt, und selbigen als Richtungslinie eines Cylinders K nehmend, dessen Erzeugungslinie mit der Erzeugungslinie l des gegebenen Cylinders parallel läuft, construirt man den Grundschnitt K′ desselben. Durch die Punkte, in welchen C′ und K′ sich schneiden, zieht man nachgehends die, beiden Cylindern C und K gemeinschaftliche, Seiten und sucht die Punkte, wo solche die Kreislinie v treffen, und man hat Punkte der gesuchten Curve, deren man sich auf demselben Wege beliebig viele verschaffen kann.

§. 321. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie eines Cylinders C mit einem windschiefen Cylinder W zu finden, wenn ersterer durch seinen Grund-

schnitt C′ und durch seine Erzeugungslinie l, letzterer dagegen durch seine Parallel-Ebene P und durch seine beiden ebenen Richtungslinien a und b gegeben ist.

Auflösung. Durch einen Punkt α in der Richtungslinie a des windschiefen Cylinders W, construire man seine zugehörige Seite $\alpha\beta$ (nach §. 307.). Nun sucht man die Punkte γ, wo $\alpha\beta$ den gegebenen Cylinder C trifft (nach §. 312.), so sind diese Punkte γ auch Punkte der gesuchten Durchschnittslinie, deren man sich demnach beliebig viele verschaffen kann.

§. 322. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie zweier Kegel C und K zu finden, von denen die Grundschnitte C′ und K′ und ihre Spitzen α und β gegeben sind.

Auflösung. Durch α, β und durch einen dritten Punkt γ in C′ oder K′, z. B. in C′, lege man die Ebene $\alpha\beta\gamma$ oder A, und durch die Punkte γ und δ, in welchen die Grundschnitte C′ und K′ von dem Grundschnitte A′ geschnitten werden, die Seiten $\gamma\alpha$ und $\delta\beta$, so ist der Punkt, in welchem sich letztere schneiden, ein Punkt der gesuchten Curve; deren man sich auf demselben Wege in beliebiger Menge verschaffen kann.

§. 323. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie eines Kegels K mit einer Umdrehungs-Fläche F zu finden, wenn vom Kegel K sein Grundschnitt K′ und seine Spitze α, von der Umdrehungs-Fläche F dagegen, ihre Umdrehungs-Axe a und ihre ebene Erzeugungslinie l gegeben sind.

Auflösung. Man construire einen zweiten Kegel C, welcher dieselbe Spitze α hat, wie der gegebene K, und einen Parallelkreis v von F zur Richtungslinie, und zeichne den Grundschnitt C′ desselben. Zieht man nachgehends durch die Punkte γ, in welchen sich die Grundschnitte C′ und K′ treffen, die ge-

meinschaftlichen Seiten $\gamma\alpha$, und bestimmt die Durchschnittspunkte dieser letztern mit dem Parallelkreis v, (welcher dem zweiten Kegel zur Richtungslinie diente), so hat man Punkte der verlangten Curve.

Anmerkung. Diese Construktion, so wie die des §. 320., kann also auch angewandt werden, wenn die Fläche F eine Kugelfläche, oder die eines senkrechten Cylinders oder eines senkrechten Kegels wäre, weil alle diese Flächen ebenfalls als Umdrehungsflächen angesehen werden können.

§. 324. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie eines Kegels K und eines windschiefen Cylinders W zu finden, wenn von ersterem der Grundschnitt K′ und die Spitze δ, von letzterem dagegen die Parallel-Ebene P und die beiden Richtungslinien a und b gegeben sind.

Auflösung. Man zieht (nach §. 307.) durch einen beliebigen Punkt α in der Richtungslinie a, die Seite $\alpha\beta$, welche (parallel mit P geht und) b in β trifft. Hernach bestimmt man den Punkt γ, wo solche Linie $\alpha\beta$ den gegebenen Kegel K trifft (nach §. 314.); und dies ist ein Punkt der gesuchten Curve. Solcher Punkte kann man aber beliebig viele finden.

Anmerkung. Da man sich denken kann, daß der windschiefe Cylinder in einen geraden übergehet, indem seine Richtungslinien in parallelen Ebenen und congruent gedacht werden, so gelten alle Construktionen, welche für den windschiefen Cylinder angegeben werden, auch allemal mutatis mutandis für den geraden Cylinder.

Und ähnliche Construktionen lassen sich dann auch leicht für analoge Aufgaben in Bezug auf den Kegel angeben, so daß viele der vorstehenden Aufgaben dadurch sogleich noch eine zweite Auflösung erhalten.

§. 325. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie zweier durch ihre Umdrehungs-Axen a und b, und durch ihre Erzeugungs-Curven l und n gegebenen Umdrehungs-Flächen A und B zu construiren.

Auflösung. Man denke sich, was durch Annahme zweier neuen Grund-Ebenen G'_1 und G'_2 allemal bewerkstelligt werden kann, daß die eine Axe a senkrecht auf der ersten Grund-Ebene stehe, und construire eine auf a senkrechte Ebene V, so wie die Durchschnitts-Figuren dieser Ebene mit A und mit B (nach §. 316.), wovon die erstere v eine Kreislinie sein wird, während die letztere beliebig und durch w bezeichnet seyn mag. Wo sich nun v und w treffen, da liegt ein Punkt der gesuchten Durchschnittslinie.

§. 325. Aufgabe.

Die Durchschnittslinie einer durch ihre Umdrehungs-Axe r und ihre Erzeugungs-Curve l gegebenen Umdrehungs-Fläche F, mit einem windschiefen Cylinder W zu finden, welcher durch seine Parallel-Ebene P und seine beiden ebenen Richtungslinien a und b gegeben ist.

Auflösung. Man lege (nach §. 307.) durch einen beliebigen Punkt α in a die (mit P parallele) Seite $\alpha\beta$ des windschiefen Cylinders, welche die b in β trifft, und construire den Durchschnittspunkt von $\alpha\beta$ mit der Fläche F (nach §. 317.), so ist dies ein Punkt der gesuchten Curve. Solcher Punkte kann man aber beliebig viele finden.

§. 327. Aufgabe.

Zwei windschiefe Cylinder V und W sind durch ihre Parallel-Ebenen P und Q und durch ihre Richtungslinien a und b für den erstern, c und d für den andern gegeben. Man soll ihre Durchschnitts-Curve finden.

Auflösung. Durch einen beliebigen Punkt α in a ziehe

man (nach §. 307.) die (mit P parallele) Seite $\alpha\beta$, welche b in β trifft, und construire die Durchschnitts-Punkte dieser Linie $\alpha\beta$ mit dem zweiten windschiefen Cylinder W; so hat man einen Punkt der gesuchten Durchschnittslinie. Solcher Punkte lassen sich aber nun beliebig viele finden.

Schluß-Anmerkung.

Alle die Aufgaben, in welchen die Durchschnittslinie eines geraden oder windschiefen Cylinders oder eines Kegels mit irgend einer ebenen oder krummen Fläche (also selbst wieder mit einem Kegel, einem geraden oder windschiefen Cylinder, oder einer Umdrehungs-Fläche) gefunden werden sollen, lassen sich (alle) dadurch lösen, daß man eine (gerade) Seite des ersten geraden oder windschiefen Cylinders oder des Kegels construirt, und dann die Durchschnitts-Punkte dieser Seite mit der andern ebenen oder krummen Fläche bestimmt, welche letztere Aufgabe dann vorher gelöst worden seyn muß. — Hätte man also diese allgemeine Aufgabe hinstellen wollen, so würde die eben angeführte Auflösung eine Menge der hier stehenden besondern Aufgaben überflüssig gemacht haben.

Beschreibende Geometrie.

Drittes Kapitel.

Construktion der Berührungs-Flächen, Berührungslinien und Normalen an gegebene krumme Flächen und deren Durchschnittslinien.

§. 328. Aufgabe.

Es ist ein Cylinder C durch seinen Grundschnitt C′ und seine Erzeugungslinie l, außer dem aber noch ein Punkt β (durch seine Projektionen β_1 und β_2) auf dem Cylinder gegeben, man soll in diesem Punkte an den Cylinder eine Berührungs-Ebene legen (Fig. 92.).

Auflösung. Man ziehe durch β eine Seite b des Cylinders, construire deren Grundschnitt b′ und lege durch b′ an C′ eine Tangente b′γ, so ist βB′γ die gesuchte Berührungs-Ebene und b′γ ihr erster Grundschnitt. Und sucht man dann den Punkt b″, wo die b die zweite Grund-Ebene G_2 trifft, so hat man sogleich den zweiten Grundschnitt b″γ derselben Berührungs-Ebene.

§. 329. Aufgabe.

Es ist alles wie vorher gegeben, man soll durch β eine Normale auf den Cylinder errichten (Fig. 92.).

Auflösung. Man construire (nach §. 328.) an β die Berührungs-Ebene $b'\gamma b''$ und dann (nach §. 278.) von dem Punkte β aus auf sie eine senkrechte Linie, so ist letztere die verlangte Normale.

§. 330. Aufgabe.

Von einem Cylinder C ist abermals der Grundschnitt C′ und die Erzeugungslinie l gegeben, außerdem aber ein Punkt δ im Raume außerhalb der Cylinder-Fläche (durch die Projektionen). Man soll durch δ an den Cylinder eine Berührungs-Ebene legen (Fig. 92.).

Auflösung. Man lege (nach §. 274.) durch δ eine Linie d parallel mit der Erzeugungslinie, suche den Punkt d′, wo solche die Grund-Ebene G_1 trifft, und ziehe durch d′ eine Tangente b′d′ an den Grundschnitt C′, so ist b′d′ der erste Grundschnitt der gesuchten Berührungs-Ebene. Und sucht man den Punkt d″, wo die Linie d die zweite Grund-Ebene schneidet, so hat man sogleich auch den zweiten gesuchten Grundschnitt $d''\gamma'$.

§. 331. Aufgabe.

Es ist alles wie vorher gegeben; man soll durch den Punkt δ eine Normale auf den Cylinder fällen, unter der Voraussetzung, daß δ ein Punkt außerhalb des Cylinders ist (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch den Punkt δ eine Ebene E senkrecht auf die Erzeugungslinie l des Cylinders, und construire die Durchschnitts-Curve v der Ebene E mit dem Cylinder. Dann klappe man (nach §. 271. seqq.) die Curve v und den Punkt δ um E′ auf G_1, zeichne von δ aus auf v die Normale $\delta\gamma$ *) und klappe dann diese Linie $\delta\gamma$ wiederum um E′ auf

*) Wie an ebene Curven, Tangenten und Normalen gezeichnet werden, wird hier, als aus der ebenen Geometrie bekannt, vorausgesetzt. Für Kreislinien ist es früher (im 2ten Bande dieses Lehrbuches) gezeigt worden, nicht aber für andere Curven, und es muß also hier angenommen werden, daß

die Ebene E zurück (nach §. 284), so hat man die verlangte Normale.

§. 332. Aufgabe.

Es ist der Cylinder C wie bisher durch seinen Grundschnitt C′ und seine Erzeugungslinie l gegeben; außerdem noch eine Linie a (durch ihre Projektionen). Man soll an den Cylinder C eine Berührungs-Ebene legen, welche mit a parallel läuft (ohne Figur).

Auflösung. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt α in a eine Linie b parallel mit l, construire den ersten Grundschnitt der Ebene (Eb. a, b) und an den Grundschnitt C′ eine mit dem vorhergenannten parallele Tangente, so wie durch ihren Berührungs-Punkt eine Seite des Cylinders (d. h. eine mit der Erzeugungslinie l parallele Linie), so bilden beide letzteren Linien die gesuchte Berührungs-Ebene.

§. 333. Aufgabe.

Der Cylinder C ist wie vorher gegeben; außerdem noch eine Ebene A. Man soll auf den Cylinder eine mit A parallele Normale legen (ohne Figur).

Auflösung. Durch einen im Raume beliebig genommenen Punkt β lege man eine Linie b senkrecht auf A (nach §. 278.), und ziehe parallel mit b eine Berührungs-Ebene E an den Cylinder (nach §. 332.), und aus einem beliebigen Punkte γ der in E liegenden Seite e des Cylinders eine Linie c senkrecht auf die Berührungs-Ebene E, so ist letztere eine solche Normale, wie sie verlangt worden.

Anmerkung. Es erhellet aus dieser Construktion, daß

---

der praktische Zeichner für andere Curven die Tangenten und Normalen nach dem Augenmaaße zeichne, oder aus Vorträgen über höhere Geometrie die Principien kennen gelernt habe, nach welchen sie gezeichnet werden können.

man unendlich viele solche Normalen findet, die jedoch alle in einer in c auf die Berührungs-Ebene E senkrechten Ebene liegen.

§. 334. Aufgabe.

Von einem Kegel K ist der Grundschnitt K′ und die Spitze α (durch ihre Projektionen) gegeben; in selbigem noch ein Punkt β. Man soll durch β eine Berührungs-Ebene an den Kegel legen (ohne Figur).

Auflösung. Man ziehe die Seite $\alpha\beta$ oder a des Kegels und durch den Punkt a′, wo solche die Grund-Ebene G_1 trifft (und welcher nothwendig in K′ liegt), ziehe man eine Tangente b an den Grundschnitt K′, und die Ebene (Eb. a, b) ist die gesuchte Berührungs-Ebene.

§. 335. Aufgabe.

Es ist alles gegeben wie im nächstvorhergehenden Paragraphen. Man soll durch β eine Normale auf den Kegel fällen (ohne Figur).

Auflösung. Man legt durch β (nach §. 334.) eine Berührungs-Ebene E, und von β aus auf E (nach §. 278.) eine senkrechte Linie c, so ist solche die verlangte Normale.

§. 336. Aufgabe.

Der Kegel K ist wiederum durch seinen Grundschnitt K′ und seine Spitze α gegeben; außer ihm noch ein Punkt δ im Raume. Man soll durch δ an den Kegel eine Berührungs-Ebene legen (ohne Figur).

Auflösung. Man ziehe die Linie $\alpha\delta$ oder a, suche ihren Grundschnitt a′, ziehe von a′ an C′ eine Tangente b, und die Ebene (Eb. a, b) wird die verlangte Berührungs-Ebene seyn, deren einer Grundschnitt die Tangente b ist, und deren zweiter Grundschnitt leicht vollends gefunden werden kann.

§. 337. Aufgabe.

Es ist alles wie im §. 336. gegeben. Man soll durch δ eine Normale auf den Kegel fällen (ohne Figur).

Auflösung. Man construire so viel wie möglich Berührungs-Ebenen an den Kegel, fälle von δ aus auf jede, eine senkrechte Linie und bestimme so die Curve v der Fußpunkte dieser senkrechten Linien. Diese Curve v zur Richtungslinie und α zur Spitze nehmend, construire man einen neuen Kegel C und seinen Grundschnitt C', und von dem Punkte b', den die Grundschnitte C' und K' gemein haben, die gemeinschaftliche Seite $b'\alpha$ oder b der Kegel, zuletzt aber den Punkt γ, in welchem b und v sich schneiden, so ist $\gamma\delta$ die verlangte Normale.

§. 338. Aufgabe.

Der Kegel K ist wiederum durch seinen Grundschnitt K' und durch seine Spitze α gegeben; außerdem noch eine Linie a (durch ihre Projektionen). Man soll eine mit a parallele Berührungs-Ebene an den Kegel legen (ohne Figur).

Auflösung. Man ziehe durch α eine mit a parallele Linie b und lege durch einen beliebig in b genommenen Punkt β eine Berührungs-Ebene (nach §. 336.) an den Kegel, so ist solche die verlangte.

§. 339. Aufgabe.

Der Kegel K ist wie bisher immer gegeben; außerdem aber noch eine Ebene A. Man soll eine Normale an den Kegel legen, welche parallel mit A läuft (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch die Spitze α eine Linie b senkrecht auf A, und durch einen in b beliebig genommenen Punkt β eine Berührungs-Ebene E an den Kegel, so geht solche durch α, also durch die auf A senkrechte Linie b und steht daher ebenfalls senkrecht auf A. Durch einen beliebigen Punkt γ der Linie der Berührung (welche durch α und durch den Berührungs-Punkt des Grundschnittes E' mit dem Grundschnitte K' gegeben

ist) ziehe man zuletzt eine Linie c senkrecht auf E, so ist solche die gesuchte Normale, parallel mit A.

§. 340. Aufgabe.

Eine Umdrehungsfläche F ist durch ihre Axe a, so wie durch ihre ebene Erzeugungslinie l gegeben, und in ihr noch ein Punkt α. Man soll durch den Punkt α eine Berührungs-Ebene legen (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch α eine Meridian-Ebene E und errichte von α aus auf solche eine senkrechte Linie b, so ist b eine Linie der gesuchten Berührungs-Ebene. Zieht man hernach noch durch α an die Meridianlinie v eine Tangente b, so bilden a und b die gesuchte Berührungs-Ebene.

Um aber die Tangente b an die Meridianlinie bequem ziehen zu können, muß man sich die Meridianlinie v um ihren Grundschnitt E′ (nach §. 271. seqq.) auf die erste Grund-Ebene G_1 geklappt verschaffen, dann die Tangente ziehen (in der ersten Grund-Ebene) und solche wiederum (nach §. 284.) auf die Ebene E zurückklappen.

Anmerkung. Man denkt sich deshalb auch gewöhnlich die Axe a der Umdrehungs-Fläche senkrecht auf G_1, also parallel mit G_2, und dann eine Ebene durch die Axe gelegt, ebenfalls parallel mit G_2, und klappt dann alle andern Meridian-Ebenen und die in ihnen liegenden Punkte und Linien um die Axe a auf diese erstere als Zeichnen-Ebene. — Im Falle die Axe nicht so steht, müßte man sich neue Grund-Ebenen denken, mit welchen die Axe gerade diese Lage hat.

§. 341. Aufgabe.

Es ist alles wie vorher gegeben; man soll durch α eine Normale auf die Umdrehungs-Fläche errichten (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch α eine Meridian-Ebene E, klappe die in ihr liegende Meridianlinie v (nach §. 271. seqq.) um E′ auf G_1, ziehe daselbst die Normale auf v, und

klappe solche dann (nach §. 284.) wiederum auf die Ebene E zurück.

Oder man lege durch α eine Berührungs-Ebene, und errichte aus α auf sie eine senkrechte Linie.

Anmerkung. Wo man sich die Umdrehungs-Axe a senkrecht auf G_1 und dann eine mit G_2 parallele Meridian-Ebene M, als Zeichnen-Ebene denkt, da klappt man alles um a auf diese Zeichnen-Ebene und hat dann den Vortheil, daß, weil alle Normalen, welche zu Punkten eines Parallelkreises gehören, sich in der Axe in einem und demselben Punkte β schneiden, dieser Punkt β sogleich in der Zeichnen-Ebene durch Verlängerung der Normale gefunden werden kann, so daß dann die Normale $\alpha\beta$ bereits gefunden ist, ohne daß es nöthig wäre, das ganze System der Zeichnen-Ebene wieder auf den alten Stand zurückzuklappen.

§. 342. Aufgabe.

Es ist abermals eine Umdrehungs-Fläche F durch ihre Axe a und ihre ebene Erzeugungslinie l gegeben, und außer ihr noch eine gerade Linie b. Man soll einen Berührungs-Cylinder an F legen, dessen Erzeugungslinie mit b parallel läuft (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch einen beliebigen Punkt γ der ebenen Erzeugungslinie l eine Tangente c, welche die Umdrehungs-Axe a in β trifft, lege durch β als Spitze, und mit $\beta\gamma$ als Erzeugungslinie einen Kegel, dessen Richtungslinie der durch die Umdrehung des Punktes γ um die Axe a, beschriebene Parallel-Kreis ist. An diesen Kegel lege man dann eine, mit der gegebenen geraden Linie b parallele Berührungs-Ebene, und bestimme den Punkt δ, wo sie den von γ beschriebenen Parallelkreis berührt. Durch diesen Punkt δ endlich wird eine mit b parallele Linie gelegt, und diese ist eine der Erzeugungslinien des gesuchten Cylinders, und ihr Grundschnitt ein Punkt des Grundschnittes dieses Cylinders.

Auf diese Weise verschafft man sich aber nach und nach beliebig viele Punkte des Grundschnittes des gesuchten Cylinders.

§. 343. Aufgabe.

Es ist die Umdrehungs-Fläche F wiederum durch ihre Umdrehungs-Axe a und durch ihre ebene Erzeugungslinie I gegeben; außer ihr noch ein Punkt α. Man soll durch α als Spitze, einen Berührungs-Kegel construiren (ohne Figur).

Auflösung. Man construire zuerst wiederum den in der Auflösung zu §. 342. gebildeten Kegel, lege durch α an ihn eine Berührungs-Ebene, suche den Punkte δ, wo solche den, von dem beliebig angenommenen Punkte γ (§. 342.) beschriebenen Parallel-Kreis trifft, so ist $\alpha\delta$ eine Erzeugungslinie des gesuchten Kegels, und ihr Grundschnitt ein Punkt des Grundschnittes des gesuchten Kegels.

Auf demselben Wege verschafft man sich aber beliebig viele solcher Punkte.

§. 344. Aufgabe.

Von der Umdrehungs-Fläche F ist die Umdrehungs-Axe a und die ebene Erzeugungslinie l gegeben, außerdem noch eine gerade Linie b. Man soll durch b an die Umdrehungs-Fläche eine Berührungs-Ebene legen (ohne Figur).

Auflösung. Man lege an die Fläche F einen Berührungs-Cylinder, dessen Erzeugungslinie parallel mit der gegebenen Linie b läuft, nehme in b einen beliebigen Punkt β und ziehe von ihm aus eine Berührungs-Ebene an den Cylinder, so ist dies die gesuchte.

§. 345. Aufgabe.

Durch einen im Raume gegebenen Punkt α eine Normale auf eine Umdrehungs-Fläche F zu fällen, wenn von letzterer ihre Umdrehungs-Axe a und ihre ebene Erzeugungslinie l gegeben ist (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch α eine Meridian-Ebene E, und klappe die in ihr liegende Meridianlinie um E' auf die Grund-Ebene G_1, — ziehe dann in dieser Zeichnen-Ebene eine

Normale $\alpha\beta$ an die Meridianlinie von dem umgeklappten Punkte α aus, welche die Meridianlinie in β trifft; und klappe dann diese $\alpha\beta$ wiederum auf die Meridian-Ebene E (nach §. 284.) zurück, so ist diese Linie $\alpha\beta$ die verlangte Normale.

Anmerkung. Man bemerke auch hier, was in der Anmerkung zu §. 341. bereits gesagt ist.

§. 346. Aufgabe.

Man soll auf die durch a und l gegebene Umdrehungs-Fläche F, parallel mit einer gegebenen geraden Linie b, eine Normale fällen (ohne Figur).

Auflösung. Durch einen beliebigen Punkt α in der Umdrehungs-Axe a lege man eine Linie c mit b parallel, construire die mit b parallele Meridian-Ebene (Eb. a, c) oder E, und klappe die in ihr liegende Meridianlinie e nebst der Linie c um E′ auf G_1; ziehe dann in dieser Zeichnen-Ebene G_1 auf die Meridianlinie eine mit c parallele Normale *) und klappe solche wiederum um E′ auf die Ebene E zurück, so ist solche Normale die verlangte.

§. 347. Aufgabe.

Mit einer gegebenen Ebene A parallel, eine Berührungs-Ebene an dieselbe Umdrehungs-Fläche F zu legen (ohne Figur).

Auflösung. Man nehme in der Umdrehungs-Axe a einen beliebigen Punkt α an, und lege durch ihn eine auf A senkrechte Linie b, und parallel mit b eine Normale auf F, zuletzt aber durch den Fuß dieser Normale eine auf sie senkrechte Ebene E, so ist solche die gesuchte Berührungs-Ebene.

§. 348. Aufgabe.

Es ist ein windschiefer Cylinder durch seine ebenen Rich-

*) Wie solche Normale gezogen wird, muß aus der ebenen Geometrie dem Zeichner bekannt seyn, oder nach dem Augenmaaße beurtheilt werden.

tungslinien c und d und seine Parallel-Ebene P gegeben, und eine Seite desselben p; man soll an p eine berührende windschiefe Ebene legen (ohne Figur).

Auflösung. Durch die Punkte α und β, in welchen p die Linien c und d trifft, ziehe man geradlinige Tangenten a an c, und b an d, und nehme diese geraden Linien a und b als Richtungslinien für die gesuchte berührende windschiefe Ebene, während die Parallel-Ebene P beibehalten wird.

§. 349. Aufgabe.

Auf dem durch die Richtungslinien c und d und die Parallel-Ebene P gegebenen windschiefen Cylinder W, von einem in ihm gegebenen Punkt α aus, eine Berührungs-Ebene zu legen (ohne Figur).

Auflösung. Durch den gegebenen Punkt α ziehe man die zugehörige Seite p des windschiefen Cylinders; an diese die berührende windschiefe Ebene V (nach §. 348.), deren Richtungslinien a und b seyn mögen. Nachgehends lege man durch α die Querseite q dieser windschiefen Ebene V, und (Eb. p, q) ist dann die gesuchte Berührungs-Ebene.

§. 350. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt γ in dem durch c und d und P gegebenen windschiefen Cylinder W, eine Normale auf letzterem zu errichten (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch α eine Berührungs-Ebene E an den windschiefen Cylinder (nach §. 349.), und dann durch α eine auf E senkrechte Linie, so ist solche die verlangte Normale.

§. 351. Aufgabe.

Außer dem durch c und d und P gegebenen windschiefen Cylinder ist noch eine, durch eine gegebene Seite p desselben gehende Ebene E gegeben. Man soll den Punkt finden, in welchem diese Ebene E den windschiefen Cylinder W berührt (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch p die berührende windschiefe Ebene V, bestimme (nach §. 307.) die in der Parallel-Ebene P liegende Seite $\alpha\beta$ derselben, und noch den Durchschnittspunkt γ dieser Seite $\alpha\beta$ mit der gegebenen Ebene E, und lege zuletzt durch diesen Punkt γ (nach §. 308.) die Querseite q der windschiefen Ebene. Wo diese Linie q die Seite p des windschiefen Cylinders trifft, da ist der gesuchte Berührungspunkt.

Denn p und q sind als zwei Berührungslinien des windschiefen Cylinders anzusehen und beide liegen zugleich in der Ebene E; also ist E in dem Punkte (P. p, q) eine Berührungs-Ebene (nach §. 265. N. 1.).

Anmerkung. Jede durch eine Seite p des windschiefen Cylinders W, übrigens beliebig gelegte Ebene E, wenn sie nur von der in der Parallel-Ebene P liegenden Seite $\alpha\beta$ der, durch p hindurch gedachten, den windschiefen Cylinder W berührenden windschiefen Ebene V, getroffen wird, — berührt daher den windschiefen Cylinder in einem gewissen Punkte.

§. 352. Aufgabe.

Es ist ein windschiefer Cylinder W durch seine Parallel-Ebene P und seine beiden ebenen Richtungslinien c und d gegeben; außer ihm noch ein Punkt α. Man soll durch α an W einen Berührungs-Kegel legen (ohne Figur).

Auflösung. Durch einen beliebigen Punkt γ in c ziehe man (nach §. 307.) die Seite $\gamma\delta$ von W und construire die Ebene $\gamma\delta\alpha$, so wie den Berührungspunkt β derselben mit W (nach §. 351.), so ist $\alpha\beta$ eine Seite des gesuchten Kegels.

§. 353. Aufgabe.

Es ist der windschiefe Cylinder W wie im §. 352. gegeben; außer ihm noch eine gerade Linie a. Man soll durch a eine Berührungs-Ebene an W legen (ohne Figur).

Auflösung. Man suche (nach §. 309.) die Durchschnittslinie v der Ebene (Eb. a, a_1) mit dem windschiefen Cylinder W, so wie den Durchschnittspunkt (P. v, a) oder α, so ist α der

Punkt, in welchem W von a getroffen wird. Dann lege man durch α die Seite p des windschiefen Cylinders, und (Eb. p, a) ist die gesuchte Berührungs-Ebene.

§. 354. Aufgabe.

Es ist der windschiefe Cylinder W wie oben im §. 352. gegeben; außer ihm ein Punkt α. Man soll durch α eine Normale an W legen (ohne Figur).

Auflösung. Man construire die Curve v der Fußpunkte aller Perpendikel, welche von α aus auf die stetig auf einander folgenden Seiten des windschiefen Cylinders W gefällt werden.

Dann zeichne man die Curve u der Fußpunkte aller Geraden, welche von α aus auf die, den windschiefen Cylinder in den stetig auf einander folgenden Punkten von v berührenden Ebenen, senkrecht gedacht sind.

Endlich ziehe man durch den gegebenen Punkt α und durch den Durchschnittspunkt (P. u, v) eine gerade Linie, so ist solche die gesuchte Normale.

§. 355. Aufgabe.

Es ist der windschiefe Cylinder W, wie vorher, durch seine Richtungslinien c und d und durch seine Parallel-Ebene P gegeben. Man soll parallel mit einer gegebenen geraden Linie a einen Berührungs-Cylinder legen (ohne Figur).

Auflösung. Durch einen beliebigen Punkt γ in c lege man die Seite $\gamma\delta$ des windschiefen Cylinders W (nach §. 307.), und durch $\gamma\delta$ mit a eine parallele Ebene E, und bestimme den Berührungspunkt β dieser Ebene E mit dem windschiefen Cylinder W. Zieht man dann durch β eine mit a parallele Linie b, so ist solche Linie b eine Seite des gesuchten Berührungs-Cylinders.

§. 356. Aufgabe.

Es ist eine Curve v als Durchschnittslinie zweier krummen Flächen A und B gegeben; in ihr noch ein Punkt α. Man soll durch α an v eine Tangente legen (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch α an A und auch an B Berührungs-Ebenen P und Q und construire die Durchschnittslinie dieser letztern, so ist diese (L. P, Q) die verlangte Berührungslinie.

§. 357. Aufgabe.

Es ist alles wie im §. 356. gegeben; aber der Punkt α liegt außerhalb der Curve v. Man soll durch α an die Curve v eine Tangente legen (ohne Figur).

Auflösung. Man lege durch α an die krummen Flächen A und B Berührungs-Kegel P und Q, und construire die Linien c und d, in welchen P die A, und Q die B berührt. Zieht man nachgehends durch den Durchschnittspunkt (P. c, d) und den gegebenen Punkt α die gerade Linie, so ist solche die verlangte Tangente.

§. 358. Aufgabe.

Es ist die Curve v wiederum als Durchschnittslinie zweier krummen Flächen A und B gegeben; man soll eine mit einer gegebenen Linie a parallele Tangente an die Curve v legen (ohne Figur).

Auflösung. Man lege an A und B Berührungs-Cylinder P und Q, deren Seiten mit a parallel laufen und construire die Curven c und d, an welchen diese Cylinder die Flächen A und B berühren. Dann ziehe man durch den Durchschnittspunkt (P. c, d) eine Linie b parallel mit a, so ist solche die verlangte Berührungslinie.

Anmerkung. Uebrigens bemerken wir noch einmal, daß die Projektionen aller Punkte eines Gegenstandes auf eine horizontale Ebene G_1 seinen (geometrischen) Grundriß, dagegen die auf G_2 dann seinen (geometrischen) Aufriß bilden.

Körperlich-geometrische Zeichenkunst.

Zweite Abtheilung.

Construktion der Schatten.

Construktion der Schatten.

§. 359. Erklärung.

Der Lichtstrahl, welcher von einem leuchtenden Punkte λ (Fig. 94.) aus, nach einem undurchsichtigen Punkte α hinfährt, wird von letzterem Punkte α aufgehalten, so daß in der Verlängerung des Strahles $\alpha\lambda$, hinter dem undurchsichtigen Punkte α, Schatten entsteht. Der Punkt A hinter α, in welchem die Verlängerung des Strahles $\alpha\lambda$ irgend eine ebene oder krumme Fläche V trifft, heißt dann der beschattete Punkt in dieser Fläche V, auch der Schlag-Schatten des α, zuweilen wohl der Schatten schlechthin.

Und die Schatten aller einzelnen Punkte einer beliebigen undurchsichtigen Linie oder Fläche zusammen, bilden den Schatten der Linie, oder der Fläche, auf der Fläche V; aber jedesmal in Bezug auf einen leuchtenden Punkt λ.

Note. Eigentlich versteht man unter dem Schatten eines Gegenstandes O, den ganzen nicht beleuchteten körperlichen Raum hinter demselben, wenn das Licht vor demselben gedacht wird. — Schlag-Schatten ist dann der Durchschnitt dieses Schattens mit irgend einer auffangenden Fläche.

§. 360. Aufgabe.

Von einem leuchtenden Punkte λ und von einem undurch-

sichtigen Punkte α sind die Projektionen auf zwei beliebig gedachte Coordinaten-Ebenen G_1 und G_2 gegeben, nämlich λ_1, λ_2 und α_1, α_2; außerdem noch eine Fläche V (wenn V eine Ebene ist, so mag sie durch ihre Grundschnitte V′ und V″ gegeben seyn). Man soll den von α auf V geworfenen Schatten finden.

Auflösung. Man ziehe die Linie $\alpha\lambda$ (d. h. ihre Projektionen) und construire ihren Durchschnitts-Punkt (d. h. die Projektionen desselben) mit der gegebenen Fläche V, so ist solcher der gesuchte Schatten. Die Construktion des Durchschnitts-Punktes geschieht aber, wenn V eine Ebene ist, nach dem §. 291.

§. 361. Zusatz.

Will man bloß den Schatten finden, welchen α auf eine der Grund-Ebenen, z. B. G_1 wirft, so hat man nur (nach §. 269.) den ersten Grundschnitt der Linie $\alpha\lambda$ zu finden, während der zweite Grundschnitt von $\alpha\lambda$ der Schatten seyn wird, von α auf die zweite Grund-Ebene G_2 geworfen.

Note. In der Anwendung ist λ gewöhnlich ein Kerzenlicht und G_1 der Fußboden eines Zimmers oder eine andere horizontale Ebene, G_2 dann eine vertikale Ebene. Der Schatten von α fällt aber auf den Fußboden G_1 oder auf die vertikale Wand G_2, je nachdem der erste Grundschnitt von $\alpha\lambda$ in die Verlängerung von G_2, oder der zweite Grundschnitt von $\alpha\lambda$ in die Verlängerung von G_1 fällt.

§. 362. Aufgabe.

Es ist wiederum das Licht λ, aber eine Ebene V gegeben und noch die undurchsichtige gerade Linie $\alpha\beta$ (durch ihre Projektionen). Man soll den Schatten von $\alpha\beta$ auf V finden (Fig. 94.).

Auflösung. Man construire den Schatten A von α und den Schatten B von β (nach §. 360.), und ziehe dann die gerade Linie AB, so ist solche der gesuchte Schatten von $\alpha\beta$.

Anmerkung. Wäre V eine krumme Fläche (etwa eine

Nische, Kugel u. dergl.), so müßte man den Schatten mehrerer Punkte von $\alpha\beta$ construiren, und den ganzen Schatten dann aus freier Hand auszeichnen.

§. 363. Zusatz.

Sucht man den Schatten, welcher von $\alpha\beta$ auf die Grund-Ebene G_1 oder G_2 selbst geworfen wird, so darf man nur (nach §. 280.) die Grundschnitte suchen der Ebene $\alpha\beta\lambda$, d. h. die Grundschnitte der geraden Linien $\alpha\lambda$ und $\beta\lambda$; der erste Grundschnitt wird der Schatten auf G_1, der zweite Grundschnitt dagegen wird der Schatten auf G_2 seyn.

Note. In der Anwendung, wo λ ein Kerzenlicht, $\alpha\beta$ ein dünner Stab und G_1 der Fußboden, so wie G_2 die vertikale Wand eines Zimmers ist, kann der Schatten zum Theil auf den Fußboden, zum Theil auf die vertikale Wand fallen. Dies findet nämlich statt, wenn der Schatten auf G_1, zum Theil in die Verlängerung von G_1 fällt, so daß dieser Theil von der vertikalen Wand G_2 aufgefangen wird, während der Schatten auf G_2 wiederum zum Theil in der Verlängerung von G_2 liegt, daher von G_1 aufgefangen worden ist. In solchem Falle wird man daher von jedem der auf G_1 und G_2 geworfenen Schatten jedesmal nur den Theil nehmen bis zur Grund-Axe, den auf der andern Seite der Projektions-Axe liegenden Theil dagegen außer Acht lassen.

§. 364. Zusatz.

Steht die Linie $\alpha\beta$ senkrecht auf G_1, oder senkrecht auf G_2, so vereinfacht sich die Zeichnung ihres Schattens auf G_1 oder auf G_2 noch bedeutend.

§. 365. Aufgabe.

Es sind gegeben die Projektionen einer beliebigen geradlinigen oder krummlinigen Figur F; außerdem noch ein Licht λ (durch seine Projektionen) und eine Fläche V. Man soll den Schatten construiren, welchen F auf die Ebene V wirft.

Auflösung. Man construire die Schatten aller oder mehrerer Haupt-Punkte von F auf V und verbinde diese durch gerade Linien, wenn diese Hauptpunkte, Ecken einer geradlinigen Figur waren und V eine Ebene ist, — oder aus freier Hand, wenn

die gedachten Haupt-Punkte zu krummlinigen Figuren gehören, oder V eine krumme Fläche ist; und man wird den Schatten von F auf V haben.

§. 366. Zusatz.

Man wird aber danach noch leichter den Schatten construiren können, welchen die Figur F auf die Grund-Ebenen G_1 oder G_2 wirft, was in den Anwendungen am häufigsten vorkommt. Und in diesen Anwendungen bedarf man in der Regel des Theiles des Schattens nicht, der in die Verlängerung der Grund-Ebenen G_1 oder G_2 fallen würde, weil solcher immer von der andern Grund-Ebene aufgefangen wird; daher wird man in solchem Falle jedesmal die Theile der Schatten bloß construiren, welche auf G_1 und G_2 bis zur Projektions-Axe G_0 hin fallen; und diese beiden Theile in Verbindung bilden dann den gebrochenen Schatten, welchen die Figur F auf beide Grund-Ebenen auf einmal wirft.

Anmerkung. Auch wenn ein Schatten auf zwei beliebige sich schneidende aber gegebene Flächen geworfen werden sollte, müßte man den Schatten auf jede dieser Flächen nur bis zu ihrer Durchschnitts-Linie hin zeichnen, um den gebrochenen Schatten zu haben.

§. 367. Zusatz.

Und wäre F ein undurchsichtiger Körper dessen Schatten in Bezug auf das Licht λ, auf einer gegebenen ebenen oder krummen Fläche V oder auf die beiden Grund-Ebenen gefunden werden sollte, so dürfte man nur den Schatten aller derjenigen auf seiner Oberfläche liegenden Punkte construiren, welche von α aus Licht empfangen; und der verlangte Schatten von F wäre gefunden.

§. 368. Erklärung.

In den bisherigen Schatten-Construktionen haben wir je-

desmal einen leuchtenden Punkt λ vorausgesetzt, wie solches allemal in der Anwendung da geschehen kann, wo ein Kerzenlicht den Schatten veranlaßt. Sobald aber der leuchtende Körper sehr beträchtlich groß ist, wie z. B. die Sonne, so kann man solchen nicht mehr als einen leuchtenden Punkt ansehen, und die bisher gelehrten Construktionen der Schatten, finden daher für diesen letztern Fall keine Anwendung. Es haben jedoch Erfahrungen und Beobachtungen gelehrt, daß die von der Sonne aus auf einen Gegenstand (z. B. eine Fläche) einfallenden Strahlen als mit einander parallel laufend angesehen werden können.

Unter dem auf eine Fläche V geworfenen Schatten einer beliebigen Fläche F, durch das Sonnenlicht veranlaßt, versteht man deshalb das Aggregat aller derjenigen Punkte, in welchen die, von allen Punkten von F aus, mit einem Sonnenstrahl parallel gedachten (also auch unter sich parallelen) Linien, die Fläche V treffen.

Anmerkung 1. Der Schlagschatten einer undurchsichtigen Fläche oder Linie F auf eine gegebene Fläche V, durch die Sonne veranlaßt, wird also gefunden, wenn die Richtung der Sonnenstrahlen (d. h. eines Sonnenstrahles) gegeben ist, und dann durch alle Punkte von F Linien parallel mit dieser Richtung gezogen werden. Wo diese letztern die Fläche V treffen, da sind Punkte des gesuchten Schlagschattens, und alle in Vereinigung bilden den ganzen Schlagschatten.

Anmerkung 2. Wenn von nun an vom Schatten gesprochen wird, so soll immer stillschweigend vorausgesetzt werden, daß solcher von der Sonne veranlaßt ist; es müßte denn ausdrücklich das Gegentheil ausgesprochen seyn.

§. 369. Aufgabe.

Es ist ein Sonnenstrahl s (durch seine Projektionen s_1 und s_2) und eine undurchsichtige gerade Linie $\alpha\beta$ gegeben; und noch eine Ebene V (durch ihre Grundschnitte V′ und V″). Man soll den Schlagschatten von $\alpha\beta$ auf V bestimmen.

Auflösung. Man lege durch α und β Linien a und b parallel mit s (nach §. 274.) und bestimme ihre Durchschnitts-Punkte (P. a, V) und (P. b, V) mit der gegebenen Ebene V (nach §. 291.); so sind letztere die von α und β auf V geworfenen Schatten. Zieht man also noch zwischen diesen Punkten die gerade Linie, so ist solche der gesuchte Schatten von $\alpha\beta$, auf V geworfen.

Anmerkung 1. Wäre aber V eine krumme Fläche (eine Kugelfläche, Cylinderfläche oder dergl.), so müßte man den Schatten mehrerer Punkte von $\alpha\beta$ so construiren, wie die von α und β eben construirt worden sind und diese dann aus freier Hand mit einander verbinden.

Anmerkung 2. In den meisten Projektionen der Schatten, so lange nicht von perspektivischen Zeichnungen die Rede ist, nimmt man den Sonnenstrahl s gewöhnlich so an, daß seine beiden Projektionen s_1 und s_2 mit der Projektions-Axe G_0 einen Winkel von 45° bilden, so also, daß der Strahl mit der Diagonale eines Würfels zusammenfällt, der zwei mit den Projektions-Ebenen G_1 und G_2 parallele Seitenflächen hat.

Da nun die Projektionen paralleler Linien selber parallele Linien sind, so bilden unter dieser Voraussetzung auch die Projektionen der in der Auflösung gezogenen Linien a und b mit der Projektions-Axe G_0 ebenfalls diesen Winkel von 45°; und überhaupt bilden dann die Projektionen aller mit dem Sonnenstrahle parallel gedachten Linien mit der Projektions-Axe einen Winkel von 45°, so daß sie bequem mechanisch gezogen werden können.

Und unter derselben Voraussetzung ist der Schatten einer auf G_1 oder G_2 senkrechten und bis an die Projektions-Ebene reichenden Geraden, auf diese Ebene G_1 oder G_0 selbst geworfen, allemal die Diagonale ihres Quadrats und bildet mit der Projektions-Axe ebenfalls einen Winkel von 45°.

§. 370. Zusatz.

Am häufigsten wird der Schatten von $\alpha\beta$ auf die Grund-Ebenen G_1 oder G_2 selbst, verlangt. In diesem Falle zieht man wiederum durch α und β die mit dem Sonnenstrahle s parallelen Linien a und b, und sucht dann (nach §. 269.) ihre Grundschnitte a′ und b′, oder a″ und b″, so ist die Linie a′b′ der auf G_1 geworfene Schatten von $\alpha\beta$, und a″b″ der auf G_2 geworfene Schatten derselben Linie $\alpha\beta$.

Sollten aber a′b′, a″b″ nicht ganz in G_1 oder G_2, sondern zum Theil in ihrer Verlängerung liegen, so würde man von jedem dieser Schatten nur den Theil nehmen, so weit er in den Grund-Ebenen selber liegt, in so fern der andere in der Verlängerung der Grund-Ebenen liegende Theil des Schattens jedesmal von der andern Grund-Ebene aufgefangen wird. Der Schatten erscheint dann als ein in der Projektions-Axe gebrochener und von beiden Grund-Ebenen zugleich aufgefangener.

§. 371. Aufgabe.

Den Schatten einer beliebig gegebenen Figur (gebrochenen oder krummen Linie) F auf eine gegebene Fläche V zu construiren, wenn ein Sonnenstrahl s (durch seine Projektionen) gegeben ist.

Auflösung. Man lege durch alle Punkte der Linie F, oder durch die Grenz-Punkte (oder vielmehr durch die Umfangs-Punkte) der Figur F (d. h. wenn der Umfang geradlinig und V eine Ebene ist, durch alle Eckpunkte, — wenn er krummlinig ist oder V eine krumme Fläche, durch mehrere und so viel wie möglich Hauptpunkte des Umfanges) Linien parallel mit dem Sonnenstrahl s, und suche die Durchschnittspunkte derselben mit der gegebenen Fläche V, so bilden solche (im erstern Falle durch die gehörigen geraden Linien, im anderen Falle aus freier Hand mit einander verbunden) den gesuchten Schatten auf V.

§. 372. Zusatz.

Da es am gewöhnlichsten vorkommt, den Schatten auf die Horizontal-Ebene G_1 oder auf die Vertikal-Ebene G_2 geworfen, zu construiren, so braucht man in diesen Fällen nur die Grundschnitte der mit dem Sonnenstrahle parallelen Linien zu finden, um dann sogleich den verlangten Schatten zu haben.

Und fällt in diesem letztern Falle der Schatten zum Theil in die Grund-Ebenen, zum Theil in ihre Verlängerungen, so werden letztere Theile der Schatten weggelassen und erstere geben einen in der Projektions-Axe gebrochenen Schatten, der zum Theil in G_1 zum Theil in G_2 liegt.

§. 373. Zusatz.

Um dies alles durch ein praktisches Beispiel recht deutlich zu veranschaulichen, sei die gegebene Fläche F ein Kreis ABCDEFGHL *) und s_1, s_2 die Projektionen des Sonnenstrahls; und zwar wollen wir diesen Kreis ABCDEFGHL

I. parallel mit G_1 (wie in Figg. 95. 96. 97.)

oder II. parallel mit G_2,

oder III. senkrecht auf G_1 und G_2, also senkrecht auf G_0, (wie in Figg. 98. 99.)

oder IV. in der Ebene des Lichtes (wie in Fig. 100.), d. h. senkrecht auf G_1 und so, daß seine Projektion auf G_1 parallel mit s_1 ist,

oder V. senkrecht auf G_1 und so, daß seine Projektion senkrecht auf s_1 steht (Fig. 101.)

annehmen; und für jeden dieser Fälle und seiner Unterfälle

---

*) Dieser Kreis ist in keiner der angeführten Figuren (96.—101.) zu sehen, sondern bloß gedacht; nur in der Fig. 98. ist er (am weitesten zur Rechten der Figur) genau so zu finden, wie er im Raume liegend gedacht ist.

mag nun die Figur jedesmal das praktische Auszeichnen nachweisen.

In jedem Falle aber sey, der größern Einfachheit wegen, der Lichtstrahl so gedacht, daß seine Projektionen mit der Axe G_0 einen Winkel von 45° bilden, und der Schatten auf G_1 oder G_2 selbst, verlangt.

I. Fall. Wenn der gegebene Kreis mit G_1 parallel ist.

Im Falle der Fig. 95. sey $A_1B_1C_1D_1E_1F_1J_1H_1L_1$, die erste Projektion des gegebenen Kreises und dann die gerade Linie A_2B_2 die zweite Projektion desselben, so werden die zweiten Projektionen der Punkte A, B, F, C, J gefunden, wenn man von A_1, B_1, F_1, C_1, J_1 auf die Axe G_0 senkrechte Linien zieht und solche verlängert, bis sie die zweite Projektion in A_2, B_2, E_2, C_2, J_2 treffen. Die Projektionen der durch einen dieser Punkte A mit s parallelen Linie ergeben sich nun, wenn man durch A_1 und A_2, die mit s_1 und s_2 parallelen Linien $A_1\alpha$ und $A_2\beta$ zieht; und der Durchschnittspunkt A′ dieser Linie mit G_1 ergiebt sich (nach §. 269.), wenn man von β aus auf die Axe G_0 eine senkrechte Linie errichtet und sie verlängert, bis solche die andere Projektion $A_1\alpha$ trifft. — So wie aber auf diese Weise der Schatten A′ von A gefunden wurde, so findet sich der Schatten der übrigen Punkte. Z. B. F_2 ist die zweite Projektion des Punktes F, aber auch des Punktes H; zieht man also $F_1\gamma$ und $H_1\delta$ mit s_1 parallel, dann $F_2\varepsilon$ mit s_2 parallel, und errichtet $\varepsilon F'H'$ senkrecht auf G_0, bis solche die $F_1\gamma$ und $H_1\delta$ in F′ und H′ schneidet, so sind F′ und H′ die Schatten der Punkte F und H. — Die Ansicht der Figur reicht hin, um die Construktion der übrigen Punkte D′, J′, B′, L′, E′ zu erkennen, und somit die Construktion des Schattens von ABCDEFHJL auf G_1 praktisch ausführen zu können.

In Fig. 97. fällt der Schatten gar nicht auf G_1, son-

dern ganz auf G_2. Die Construktion desselben ist genau so, wie in dem vorigen Falle, nur daß diesmal die zweiten Grundschnitte der mit s parallelen Linien gesucht werden müssen.

In Fig. 96. fällt der Schatten theils auf G_1, zum Theil auf G_2, und die Betrachtung der Figur zeigt, daß der erste Theil wie in Fig. 95., der andere dagegen wie in Fig. 97. gezeichnet ist.

II. Fall. Ist der gegebene Kreis mit G_2 parallel, so bleibt die Construktion in den drei Unterfällen, welche dann existiren können, jedesmal genau dieselbe, wie in dem vorhergehenden Hauptfalle (I.), weil man nur die Grund-Ebenen verwechseln darf, um diesen Fall von dem vorigen nicht verschieden zu sehen.

Note. Uebrigens mag man bemerken, daß so oft der Kreis mit einer Ebene parallel läuft, sein Schatten auf diese Ebene allemal ein mit ihm congruenter Kreis seyn muß. In dem Falle der Figur 95. (in I.) z. B. hätte man daher praktisch bloß den Schatten des Mittelpunktes C zu construiren gehabt, und dann aus dem Mittelpunkte C' mit demselben Radius die Kreislinie des Schattens vollends auszeichnen können.

Eben so hätte man in Fig. 96. den Theil des Schattens wenigstens, welcher auf die mit dem gegebenen Kreise parallele Ebene G_1 fällt, auf ähnliche Weise bequemer zeichnen können.

III. Fall. Steht aber der gegebene Kreis (d. h. die Ebene desselben in ihrer Verlängerung, oder er selbst) auf der Axe G_0 senkrecht so sind die beiden Projektionen des Kreises gerade Linien, also Projektionen der mit G_1 und G_2 parallelen Durchmesser DE und AB. — Um hier die Projektionen mehrerer der übrigen Punkte des Kreises zu haben, muß man erstlich bedenken, daß A_1, C_1 und B_1 in einem und demselben Punkte zusammen fallen, weil ACB auf G_1 senkrecht steht; eben so fallen D_2, C_2 und E_2 in einem Punkte zusammen. Für jeden der übrigen Punkte, z. B. K verzeichne man den Kreis auf irgend eine Zeichnen-Ebene (wie solches in Fig. 98. rechts zu sehen ist) und ziehe nun KK'_1 senkrecht auf DE, so ist K_1, wenn $C_1K_1 = CK'_1$ gemacht wird, die Projektion von K; und zieht man

KK'_2 senkrecht auf AB und macht $C_2K_2 = CK'_2$, so ist der Punkt K_2 die zweite Projektion von K, wie in die Augen fällt. Es fallen daher noch zusammen die Projektionen L_1 und H_1, desgleichen F_1 und J_1, ferner F_2 und H_2, endlich J_2 und L_2 (bei unserer bisherigen Annahme der Punkte F, H, J, L).

Hat man aber die Projektionen der einzelnen Punkte bestimmt, so geht die Construktion des Schattens ohne Weiteres von statten, wie solches in den Figg. 98. und 99. für die ersten zwei Fälle zu sehen ist, wo 1) der Schatten ganz auf G_1 oder 2) ganz auf G_2 fällt.

IV. Fall. Liegt der Kreis ABCDEFHJL in der Ebene des Lichtes, d. h. senkrecht auf C_1 und so, daß seine erste Projektion mit der Projektion s_1 des Lichtstrahles parallel läuft, so ist der Schatten eine bloße gerade Linie, deren Endpunkte gefunden werden müssen. Man dürfte daher nur an die zweite Projektion (Fig. 100.) Tangenten $K_2\alpha$ und $M_2\beta$ ziehen, parallel mit s_2, und dann $\alpha K'$ und $\beta M'$ senkrecht auf G_0 errichten, und K', M' wären offenbar die Endpunkte des gesuchten Schattens.

Weil aber die zweite Projektion dieser Kreislinie in der Regel eine Ellipse seyn wird, und Tangenten an Ellipsen nicht so leicht gezogen werden können, so kann man für diesen Fall lieber eine direkte Construktion dieses geradlinigen Schattens statt finden lassen.

Es wird nämlich der Schatten bestimmt, wenn man an die auf G_1 senkrechte Kreislinie, die äußersten Lichtstrahlen, welche sie noch auffängt, zeichnet und die Punkte sucht, wo solche die Grund-Ebene G_1 treffen. Man bestimme also den Winkel φ, welchen der Lichtstrahl s mit der Grund-Ebene G_1 oder mit seiner Projektion s_1 macht *), und da die äußersten

*) Bei der für solche Construktionen gewöhnlichen Annahme des Lichtstrahls, die auch hier gemacht worden, wird dieser Winkel gefunden, wenn

Lichtstrahlen unter demselben Winkel einfallen, so denke man sich die Kreislinie um ihre Projektion D_1E_1 auf G_1 umgeklappt, dann irgendwo eine Linie $\gamma\delta$ gezogen, welche mit der Projektion D_1E_1 den Winkel φ bildet, und zuletzt parallel mit dieser Linie $\gamma\delta$ die Tangenten MM′ und KK′ geführt, so werden sich auf D_1E_1 die Endpunkte K′ und M′ des gesuchten Schattens ergeben.

V. Fall. Denken wir uns endlich die gegebene Kreislinie senkrecht auf G_1, und ihre erste Projektion senkrecht auf s_1 (sie selbst also senkrecht auf die Ebene des Lichtes), so darf man nur die Projektionen der Punkte bestimmen (nach §. 256. N. 5.) und dann, wie bisher immer, den Schatten construiren, wie solches in Fig. 101. zu sehen ist.

Aber auch hier ist es zuweilen rathsamer, den Schatten direkt zu construiren, weil man dann so wenig, wie im vorigen Falle IV., der zweiten Projektion der Kreislinie bedarf. — Es wird nämlich in diesem Falle der Schatten auf G_1 eine Ellipse bilden, deren Breite (kleine Axe) der Durchmesser der Kreislinie ist, und deren Länge (große Axe, und vorzüglich ihre Endpunkte) gefunden werden, wenn man durch die Endpunkte des auf G_1 senkrechten Durchmessers der Kreislinie, Linien parallel mit s gezogen sich denkt, und dann die Durchschnittspunkte derselben mit G_1 sucht. Man ziehe daher durch D_1 und E_1 Linien $D_1\alpha$ und $E_1\beta$ senkrecht auf D_1E_1, so bilden diese die Breite des Schattens; und denkt man sich dann den auf G_1 senkrechten Durchmesser AB der Kreislinie dergestalt um C_1, in der Ebene des Kreises umgeklappt, so daß $C_1P = C_1A$ und $C_1N = C_1B$ wird, und durch P und N Linien PA′ und NB′ gezogen, welche mit der aus C_1 auf D_1E_1 senkrecht gezogenen $C_1\gamma$ den Winkel φ bilden, welchen s mit s_1 macht,

---

man ein rechtwinkliches Dreieck zeichnet, welches die Hypothenuse eines Quadrats zur einen Kathete, die Seite des Quadrats dagegen zur andern Kathete hat, und dann den kleinsten Winkel dieses Dreiecks nimmt.

so sind A′ und B′ die Endpunkte der Länge des Schattens *). Und so wie die Schatten der Endpunkte A und B des auf G_1 senkrechten Durchmessers gefunden worden sind, so kann man auch die Schatten der Endpunkte von beliebig genommenen mit AB parallelen Sehnen, z. B. LH, JF, ꝛc. ꝛc. construiren, die Abstände der Punkte L, H, J und F ꝛc. ꝛc. für sich aus einer besonders auf eine Zeichnen-Ebene geklappten Figur, welche den gegebenen Kreis in seiner wahren Lage zu seiner Projektion D_1E_1 ausspricht, nehmend.

Sollte dagegen für denselben Fall, der Schatten auf G_2 gefunden werden, oder zum Theil auf G_1, zum Theil auf G_2, so würde man zwar auch so schließen können, die zweite Projektion nicht nöthig haben, dagegen die Punkte suchen müssen, in welchen die mit s durch A, B, C, D, E, F, H, J, L parallel gedachten Linien die zweite Grund-Ebene G_2 treffen; während die Punkte A, B, C, D, E, F, H, J und L durch ihre erste Projektion und durch ihren Abstand von dieser, gegeben sind.

Note. Man kann auch auf diese Weise den Schatten eines durch zwei concentrische oder excentrische Kreise gebildeten undurchsichtigen Ringes finden, indem man nämlich die Schattengrenze des innern und des äußern Kreises construirt.

§. 374. Aufgabe.

Den Schatten eines beliebigen und gegebenen Körpers auf eine gegebene Fläche zu finden, wenn die Projektionen eines Lichtstrahles gegeben sind.

Auflösung. Man construire die Schatten aller einzelnen, das Licht auffangenden Begrenzungsflächen des Körpers, und sie zusammen bilden den gesuchten Schatten.

---

*) Da A′B′ und D′E′ die beiden Haupt-Axen der Ellipse sind, so kann man solche auch durch mechanische Hülfsmittel auszeichnen, ohne weiter einen Punkt nöthig zu haben.

Anmerkung. Weil es aber nicht nöthig ist, die Grenzen der einzelnen Schattentheile zu kennen, da wo solche zusammenstoßen, sondern nur da, wo sie sich von dem Lichte absondern, so wird in einzelnen gegebenen Fällen die Construktion sich bedeutend vereinfachen lassen. Deshalb mögen hier noch einige dieser Fälle Platz finden.

§. 375. Aufgabe.

Den Schatten eines durch seine Erzeugungslinie l, seinen ersten Grundschnitt C′ und durch die Grundschnitte E′, E″ und P′, P″ der Ebenen seiner Grundflächen völlig gegebenen Cylinders zu finden (die Grundflächen E und P mögen mit einander parallel laufen oder nicht, d. h. der Cylinder mag ein gewöhnlicher oder ein schief abgeschnittener seyn), wenn die Projektionen eines Lichtstrahls s gegeben sind.

Auflösung. Man suche (nach §. 313.) die Projektionen der Grundflächen E und P des Cylinders C; lege dann (nach §. 332.) an die krumme Cylinder-Fläche Berührungs-Ebenen B, D, die mit s parallel laufen, und suche die Durchschnittslinie derselben mit der Ebene V, so bilden solche die Grenzen des Schattens in der Breite. Dann construire man die Schatten der Grundflächen E und P, jedoch letztere nur in so weit sie mit dem Lichte zusammengrenzen; und man hat sonach den Schatten des gegebenen Cylinders.

Anmerkung. Im Praktischen wird diese Aufgabe in der Regel in weit einfacherer Gestalt erscheinen; z. B. der Cylinder ist ein gemeiner senkrechter, mit parallelen und congruenten Kreisflächen als Grundflächen (eine Säule, Welle, oder dergl.), der entweder mit seiner Grundfläche oder mit seiner Seite auf G_1 liegt, oder doch dessen Seite entweder senkrecht auf G_1 steht, oder parallel mit G_1 läuft, wenn er auch nirgends selbst an G_1 grenzt; und jedesmal soll der Schatten auf G_1 oder auf G_2 selbst gefunden werden, so daß die obige Fläche V mit G_1

oder mit G_2 zusammenfallend gedacht werden muß. In jedem dieser speciellen Fälle wird man bloß den Schatten der obern oder höchstens beider Kreis-Grundflächen zu construiren und selbige durch gemeinschaftliche Tangenten mit einander zu verbinden haben, so daß die nächstvorhergehenden praktisch ausgeführten Zeichnungen des §. 373. bereits alles Nöthige in der Ausführung enthalten. — Und dieselbe einfachere Construktion des Schattens würde auch statt finden, wenn der senkrechte Cylinder gegen beide Grund-Ebenen G_1 und G_2 schief geneigt wäre, oder wenn der Cylinder ein schiefer, aber von parallelen und congruenten Kreis-Grundflächen begrenzt wäre, und dabei eine beliebige Lage hätte.

§. 376. Aufgabe.

Den Schatten eines gegebenen Kegels zu zeichnen.

Auflösung. Man lege an ihn zwei Berührungs-Ebenen parallel mit dem Lichtstrahle s, und suche ihre Durchschnitte mit der den Schatten auffangenden Ebene V, so hat man die Grenzen des Schattens von zwei Seiten. Dann construire man noch den Schatten der Grundfläche, aber nur in so weit er an das Licht grenzt, und der Schatten des Kegels ist vollendet.

Oder man kann auch bloß den Schatten der Grundfläche und den Schatten der Spitze construiren (auf eine gegebene Ebene V) und dann von letzterem aus an ersteren, Tangenten in V ziehen.

§. 377. Aufgabe.

Den Schatten einer Kugel zu finden.

Auflösung. Man lege um die Kugel einen Berührungs-Cylinder, dessen Erzeugungslinie parallel mit dem Lichtstrahle s läuft. Man suche den Durchschnitt dieses Cylinders mit der

den Schatten auffangenden Fläche V, so begrenzt solcher den verlangten Schatten.

Schluß-Anmerkung.

Die bisherigen Beispiele der Projektion der Schatten mögen ausreichen, dem mit der Geometrie vertrauten Zeichner, die Anwendung der allgemeinen Principien anschaulich zu machen und ihn dadurch in den Stand zu setzen, in den vorkommenden einzelnen Fällen sich selber helfen zu können.

Das Weitere muß der praktische Zeichner in den eigends für die Projektion der Schatter niedergeschriebenen praktischen Werken nachlesen.

Körperlich-geometrische Zeichenkunst.

Dritte Abtheilung.

Perspective.

Perspektive.

Einleitung.

Allgemeine Definitionen und allgemeine Lösung des Haupt-Problems.

§. 378. Erklärung.

Vor einer Ebene G_2, welche Tafel (Maler-Tafel, auch Bild-Ebene genannt werden mag) befinde sich ein Auge A (Fig. 102.), hinter derselben Ebene ein Punkt P, so wird der Punkt p, in welchem diese Tafel G_2 von der, von dem Punkte P aus nach dem Auge A gedachten Linie PA getroffen wird, die Perspektive (das perspektivische Bild auch schlechthin das Bild) von P auf der Tafel G_2 genannt. — Und befindet sich hinter der Tafel statt des Punktes P irgend ein Gegenstand (Objekt) O, so bildet die Perspektive aller seiner in das Auge A fallenden Punkte auf G_2 (die Tafel G_2 als durchsichtig gedacht), die Perspektive (oder das Bild, die perspektivische Zeichnung) des Gegenstandes O.

Anmerkung. Aus dieser Definition geht sogleich hervor:

1) Die perspektivische Zeichnung einer geraden Linie BC ist im allgemeinen selber eine gerade Linie; sie ist ein Punkt,

wenn die Linie BC in ihrer Verlängerung durch das Auge A gehen würde.

2) Auch eine krumme Linie kann eine gerade zur Perspektive haben, wenn nämlich die krumme Linie in einer Ebene liegt, die durch das Auge durchgeht.

3) Das Bild eines Winkels ist selber ein Winkel, den Fall ausgenommen, wenn seine Ebene, gehörig verlängert, durch das Auge gehen würde, weil dann das Bild beider Schenkel in eine und dieselbe Linie zusammenfallen müßte.

§. 379. Erklärung.

Man denkt sich gewöhnlich die Tafel G_2 vertikal und dann noch eine Horizontal-Ebene G_1, welche G_2 senkrecht in der Linie G_0 schneidet, und kann dann G_1 und G_2 als zwei Projektions-Ebenen ansehen, deren Projektions-Axe G_0 ist, und auf welche die Projektionen aller Punkte bezogen werden können.

Diese horizontale Ebene G_1 wird nun die Grund-Ebene vorzugsweise genannt (auch die Erd-Ebene, geometrische Ebene, Haupt-Objektiv-Ebene) und die (horizontale) Linie G_0 die Grundlinie (Grund-Axe). Und werden (Fig. 102.) vom Auge A die Projektionen A_1 und A_2 auf G_1 und G_2 gefällt, so heißt A_1 der Fußpunkt des Auges, A_2 der Hauptpunkt, Augenpunkt (der Tafel), A selber das Auge oder der Gesichtspunkt; und A_0, wo die aus A_2 auf die Grundlinie G_0 gefällte senkrechte (vertikale) Linie A_2A_0 die G_0 trifft, der Grundpunkt (Fußpunkt des Hauptpunktes). Die Ordinate AA_1 wird ferner die Höhe des Auges, so wie die Ordinate AA_2 der Augen-Abstand genannt; während die Richtung AA_2 die Augen-Axe, der Hauptstrahl heißt. Die Ebene AA_2A_0 (in das Unendliche verbreitet) heißt die Vertikal-Ebene des Auges, und ihre Durchschnittslinie A_0W mit der Grund-Ebene die Hülfs-Grundlinie; so wie eine durch das Auge A mit

G_1 parallele Ebene AA_2A' die Horizontal-Ebene des Auges; endlich heißt die (horizontale) Linie $A'A''$, in welcher letztere die Tafel G_2 schneidet, der Horizont (die Gesichtslinie, Horizontallinie des Auges).

Jede andere mit G_1 parallele Ebene wird höhere oder niedrigere Objektiv-Ebene heißen können.

Anmerkung. In der Folge werden wir in den citirten Figuren nur diejenigen Punkte, Linien, Winkel ꝛc. angeben, welche in der Tafel G_2 liegen, dagegen die Grund-Ebene G_1 und alles was auf ihr liegt, überhaupt alles was hinter der Tafel liegt, so wie das Auge vor der Tafel bloß hinzu denken, um die Zeichnungen anschaulicher zu machen. Dabei soll G_0 allemal die Grundlinie, A_0 den Grundpunkt und A_2 den Haupt- oder Augenpunkt vorstellen, wenn dies auch nicht besonders angegeben seyn sollte, so wie G_2 allemal die Tafel vorstellt und G_1 die Grund-Ebene.

§. 380. Aufgabe.

Das Auge A und ein Punkt P sind durch ihre Projektionen A_1, A_2 (Fußpunkt des Auges und Hauptpunkt) und P_1, P_2 gegeben, während G_1 die Grund-Ebene und G_2 die Tafel ist; man soll die Perspektive des Punktes P finden (auf der Tafel G_2) (Fig. 103.) *).

Auflösung. Man zeichne die Projektionen der Linie AP, nämlich A_1P_1 und A_2P_2; und suche (nach §. 269.) den Punkt p, wo solche Linie AP die Tafel G_2 trifft; d. h. man errichte aus dem Punkte α, in welchem die erste Projektion A_1P_1 die Axe G_0 trifft, die Gerade αp senkrecht auf die Grundlinie G_0, und verlängere solche, bis sie die zweite Projektion A_2P_2 in p trifft, so ist dieser Punkt p die gesuchte Perspektive des Punktes P;

*) Es ist hier die Grund-Ebene G_1, wie in der beschreibenden Geometrie immer geschieht, um die Axe (Grundlinie) G_0 so herumgeklappt gedacht, daß endlich ihre Ebene in die Verlängerung der Tafel G_2 fällt.

d. h. der Punkt p ist derjenige, in welchem die von A nach P gezogene gerade Linie AP die Tafel trifft.

Anmerkung. Das Auge ist gewöhnlicher durch den Hauptpunkt A_2, durch den Augen-Abstand AA_2 und durch die Höhe des Auges AA_1 gegeben. In diesem Falle ist jedoch die Projektion A_1 (der Fußpunkt des Auges) sogleich gefunden, weil man nur A_0A_1 dem Augen-Abstande AA_2 gleich nehmen darf, während A_0 erhalten wird, wenn man A_2A_0 senkrecht auf die Grundlinie G_0 zieht. Der Punkt P ist eben so gewöhnlicher durch seine erste Projektion P_1, durch seine Ordinate PP_1 (Höhe über P_1) und seine zweite Ordinate PP_2 (Abstand desselben von der Tafel, Objekts-Abstand) gegeben. Daraus findet sich aber eben so leicht P_2, wenn man P_1P_0 senkrecht auf G_0 zieht und dann in der Verlängerung P_0P_2 der Höhe PP_1 gleich macht. Und die erste Projektion P_1 wird gewöhnlich durch zwei Ordinaten P_1P_0 und P_1P' gegeben (Abscisse und Ordinate), auf G_0 als Abscissen-Axe und A_0W als Ordinaten-Axe bezogen, während A_0W die Hülfs-Grundlinie (§. 379.), d. h. die Durchschnittslinie der Vertikal-Ebene des Auges mit der Grund-Ebene G_1 ist. Es wird dann P_1 gefunden, wenn man $A_0P_0 = P_1P'$ macht, die P_0P_1 auf die Axe G_0 senkrecht errichtet, und dann P_0P_1 darauf von P_0 aus abträgt.

§. 381. Zusatz.

Liegt der Punkt P in der Grund-Ebene G_1 selbst, so fällt P mit P_1 zusammen und P_2 mit P_0, und π ist dann die gesuchte Perspektive des Punktes P_1.

Daraus folgt aber, daß wenn P nicht in der Grund-Ebene, sondern von ihr um PP_1 entfernt liegt, dann $p\pi$ die Perspektive dieses Abstandes PP_1 seyn wird.

Es ist also danach sehr leicht, die Perspektive einer, auf der Grund-Ebene G_1 senkrechten Linie (einer Höhe) PP_1 zu zeichnen.

§. 382. Aufgabe.

Die Perspektive irgend eines durch die Projektionen seiner

ihn bestimmenden Punkte gegebenen Gegenstandes O zu zeichnen, für ein gegebenes Auge A.

Auflösung. Man zeichne (nach §. 380.) die Perspektive aller einzelnen gegebenen Punkte des Gegenstandes O, und sind im Gegenstande O diese Punkte durch gerade Linien verbunden, so verbinde man ihre Perspektive ebenfalls durch gerade Linien; im entgegengesetzten Falle aber aus freier Hand, vorausgesetzt, daß man nahe genug auf einander folgende Punkte bereits perspektivisch entworfen habe. Und so hat man die perspectivische Zeichnung des Gegenstandes O.

Anmerkung. Es wäre also hiermit die Haupt-Aufgabe der Perspektive gelöst, und wir könnten unsern Vortrag darüber als beendigt ansehen, wenn wir nicht zu gleicher Zeit noch dem praktischen Zeichner mehrere der wichtigsten praktischen Regeln an die Hand geben, und ihre Richtigkeit aus der früher vorgetragenen Körperlehre nachweisen wollten. Deshalb werden wir in den folgenden Kapiteln noch dieselbe allgemeine Aufgabe des §. 382. in einzelnen, einfachern und zusammengesetztern Fällen durchnehmen und so das perspektivische Zeichnen der Linien, Winkel, Parallellinien und ebenen Figuren, welche in oder außer der Haupt-Objektiv-Ebene (Grund-Ebene) liegen, endlich auch das perspektivische Zeichnen einzelner gegebener Körper, nachweisen.

§. 383. Erklärung.

Denkt man sich eine Linie $\alpha\beta$ (Fig. 102.), welche die Tafel G_2 in beliebiger Neigung trifft, und durch einen gegebenen Punkt P hinter der Tafel eine Linie Pp parallel mit $\alpha\beta$, so heißt der Punkt p, wo letztere die Tafel G_2 trifft, die nach der Richtung $\alpha\beta$ genommene Projektion des Punktes P auf die Ebene G_2. — Und findet man von allen Punkten eines hinter der Tafel G_2 befindlichen Gegenstandes O, die nach der Richtung $\alpha\beta$ genommenen Projektionen auf G_2, so hat man die nach der Richtung $\alpha\beta$ genommene Projektion des ganzen Gegenstandes O auch die Ebene G_2. Diese nach $\alpha\beta$ genommene

Projektion eines Gegenstandes heißt die orthographische Projektion oder auch eine geometrische Zeichnung, wenn $\alpha\beta$ senkrecht auf der Zeichentafel G_2 steht; sie wird die Cavalier-perspektive genannt, wenn $\alpha\beta$ mit der Zeichentafel G_2 einen Winkel von 45° bildet; sie heißt überhaupt die Militär- oder Vogel-Perspektive, wenn $\alpha\beta$ gegen G_2 beliebig geneigt ist.

Note. Je mehr man in der gewöhnlichen Perspektive das Auge A von der Tafel entfernt, desto mehr wird sich die perspektivische Zeichnung eines Gegenstandes, seiner nach der Richtung des Auges genommenen Projektion nähern, und es können beide als zusammenfallend angesehen werden, sobald man das Auge unendlich entfernt nimmt.

Anmerkung 1. Der vorstehenden Erklärung gemäß, ist die Projektion eines Gegenstandes O auf die Tafel G_2 nach einer Richtung $\alpha\beta$ genommen, übereinstimmend mit der Projektion des Schattens, welchen der Gegenstand auf die Tafel G_2 werfen würde, wenn $\alpha\beta$ die Richtung eines, nach dem im Unendlichen gedachten Auge, gehenden Sonnenstrahles wäre. Durch die vorstehende Lehre der Projektionen der Schatten, kann daher auch die Militär-(Vogel-) und Cavalier-Perspektive als bereits absolvirt angesehen werden.

Anmerkung 2. Die Perspektive, welche hier definirt worden, nennt man auch die Linear-Perspektive, auch die geometrische Perspektive, zum Unterschied von der Luft-Perspektive, welche zum Zweck hat, den Ton der Farben zu bestimmen, um den Punkt, der nach der Linear-Perspektive richtig gezeichnet ist, dem Auge so erscheinen zu lassen, daß es auch hinsichtlich der Entfernung getäuscht werde, und denselben Eindruck von dem perspektivischen Punkte p erhalte, den es von dem Punkte P unmittelbar erhalten würde, wenn solcher von A aus unmittelbar gesehen seyn sollte.

Perspektive.

Erstes Kapitel.

Von der perspektivischen Zeichnung von Figuren, welche in der Grund-Ebene oder doch in horizontalen (Objektiv-) Ebenen liegen.

§. 384. Aufgabe.

Es ist gegeben der Punkt P in der Grund-Ebene G_1; man soll seine Perspektive auf der Tafel G_2 für das in A gegebene Auge verzeichnen (Fig. 104.).

Auflösung. Zieht man von P aus auf die Grundlinie G_0 die Senkrechte PP_2, so stehen PP_2 und AA_2 auf der Ebene G_2 senkrecht, laufen daher mit einander parallel und liegen also nebst den Linien AP und A_2P_2 in einer und derselben Ebene, so daß der gesuchte perspektivische Punkt in der Linie A_2P_2 liegt, und so daß, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke pPP_2 und pAA_2

$$AA_2 : PP_2 = A_2p : P_2p = Ap : Pp$$

ist. Das ganze Geschäft reducirt sich also darauf: Man ziehe PP_2 auf die Grundlinie G_0 senkrecht, dann P_2A_2 und theile P_2A_2 dergestalt in p, daß die Theile pA_2 und pP_2 zu einander sich verhalten, wie die Augen-Entfernung AA_2 zur Entfernung PP_2 des Punktes von der Tafel; und p ist dann der verlangte Punkt. Nun wird aber eine beliebige Linie P_2A_2 in ein

gegebenes Verhältniß m:n getheilt, so nämlich, daß $pA_2 : pP_2 = m:n$ ist, wenn man an die Endpunkte P_2 und A_2 unter einem beliebigen Winkel, mit einander parallele Linien zieht (in der Tafel kann allemal die Grundlinie G_0 und die Horizontallinie A_2A' dazu genommen werden), auf diesen parallelen Linien Stücke A_2A' und P_2P' abträgt, so daß $A_2A' = m$ und $P_2P' = n$, oder doch so, daß $A_2A' : P_2P' = m:n$ ist, und dann $A'P'$ zieht; wo solche die P_2A_2 schneidet, da ist der gesuchte Punkt p.

Anmerkung. Man konnte eben so gut $A_2A'' =$ dem Augen-Abstand AA_2, dann aber $P_2P'' = P_2P$ machen und $A''P''$ ziehen; diese letztere Gerade wird dann die A_2P_2 in demselben Punkte p schneiden, und der perspektivische Punkt von P, nämlich p, wäre abermals gefunden.

Eben so könnte man A_2O oder $A_2O' = AA_2$ machen, dann $P_2P'_1$ oder P_2P_1 senkrecht auf G_0 in der Tafel-Ebene zeichnen und $= PP_2$ machen, zuletzt aber P'_1O' oder P_1O ziehen und jedesmal würden diese Linien die A_2P_2 in demselben Punkte p schneiden, der das perspektivische Bild von P ist.

§. 385. Zusatz.

Denkt man sich in G_1 die Durchschnittslinie A_0W der Vertikal-Ebene des Auges mit der Grund-Ebene, gezogen, so bilden G_0 und A_0W zwei auf einander senkrechte Axen und der Punkt P kann dann durch die beiden senkrechten Abstände (Ordinaten) PP_2 und PP_0 als gegeben angesehen werden. Dies vorausgesetzt, so wird das praktische Verfahren folgendes seyn.

Man trage von dem Fußpunkte A_0 aus die Ordinate PP_0, d. h. man mache $A_0P_2 = PP_0$, (links oder rechts von A_0, je nachdem gegeben ist, daß P links oder rechts der Vertikal-Ebene liegt). Ist auf diese Weise der Punkt P_2 bestimmt, so mache man von P_2 aus, $P_2P' =$ der andern Ordinate PP_2, und $A_2A' =$ der Augen-Entfernung AA_2; ziehe P_2A_2 und $A'P'$, und der Punkt p, in welchem sich beide schneiden, ist der gesuchte.

§. 386. Zusatz.

Soll auf diese Weise eine ganze Zeichnung, die in der Grund-Ebene G_1 liegt, perspektivisch dargestellt werden, so kann man sich die Grund-Ebene G_1 von der Tafel G_2 ganz getrennt denken. Wäre z. B. (Fig. 105.) MNPQ eine eingefaßte Zeichnung, welche in der Grund-Ebene G_1 in gegebener oder angenommener Entfernung von der Tafel (d. h. von G_0) liegend, gedacht wird, und darin außer mehreren Gegenständen auch das schiefliegende Kreuz BCDE; und solches, so wie die ganze Zeichnung perspektivisch zu entwerfen, für ein gegebenes Auge A; — so ziehe man in der Zeichnung MNPQ die Grundlinie G_0 in der gegebenen oder angenommenen Entfernung, und ziehe darin die durch den Fußpunkt des Auges A_0 gegebene auf G_0 senkrechte Linie A_0W. Nach dieser Vorbereitung nehme man eine Fläche G_2 als Maler-Tafel (Fig. 106.), darin zuerst eine gerade Linie G_0 als Grundlinie, und hierin wiederum den Fußpunkt A_0 des Hauptpunktes so an, wie solcher durch die Lage des Auges gegeben ist, ziehe A_0A_2 senkrecht auf G_0, mache $A_0A_2 =$ der gegebenen Höhe des Auges, so ist A_2 der Hauptpunkt der Tafel; ziehe dann durch A_2 die Linie $A'A_2$ parallel mit G_0, und $A'A_2$ ist die Horizontallinie des Auges. Dann ziehe man in der Zeichnung (Fig. 105.) EE_1, BB_1, CC_1, DD_1 senkrecht auf G_0, so hat man von jedem Punkte B, C, D, E, der gezeichnet werden soll, die Coordinaten *). Nachher gehe man zur Tafel (Fig. 106.), mache $A_0E_0 = EE_1 = A_0E_2$, $E_0E' = EE_2$, so wie ein für allemal $A_2A' = AA_2$ (d. h. dem Augen-Abstande gleich), ziehe A_2E_0 und $A'E'$, und der Punkt e, in welchem sich diese Linien schneiden, ist die Perspektive des Punktes E. Macht man ferner $A_0B_0 = BB_1 = A_0B_2$, $B_0B' = BB_2$, zieht A_2B_0 und $A'B'$, so ist ihr Durchschnittspunkt b die Per-

---

*) Da die Koordinaten BB_1, CC_1, DD_1 und EE_1 bezüglich den Abständen A_0B_2, A_0C_2, A_0D_2 und A_0E_2 gleich sind, so ist es nicht einmal nöthig, die BB_1, CC_1, DD_1 und EE_1 wirklich zu ziehen.

spektive von B; und die gerade Linie eb ist nun die Perspektive von EB. Ferner mache man $A_0C_0 = CC_1 = A_0C_2$ und $C_0C' = CC_2$, ziehe A_2C_0 und $A'C'$, und der Durchschnittspunkt c ist die Perspektive von C. Und wird zuletzt $A_0D_0 = DD_1 = A_0D_2$ und $D_0D' = DD_2$ gemacht; werden ferner die Linien A_2D_0 und $A'D'$ gezogen, so findet sich d als die Perspektive von D; und cd ist dann auch die Perspektive von CD, und bcde das perspektivisch gezeichnete Kreuz BCDE.

Anmerkung 1. Man könnte die ganze Zeichnung MNPQ um G_0 auf G_2 umgeklappt denken, so daß G_1 in die Verlängerung von G_2 zu liegen käme, wie solches (Fig. 107.) zu sehen. Hätte man dieses Umklappen wirklich ausgeführt, wie solches für jeden einzelnen Punkt (nach §. 271.) statt finden muß, hätte man also dieselbe Zeichnung MNPQ auf diese Weise umgezeichnet, wie dies in Fig. 107. in Bezug auf das Kreuz BCDE zu sehen ist, so würde man nachgehends die perspektivische Construktion etwas vereinfachen können. Man würde nämlich dann bloß von E, D, C, B ꝛc. aus, auf G_0 die senkrechten Linien EE_0, DD_0, CC_0, BB_0 fällen und dann für jeden der Punkte, z. B. für C, von C_0 aus, mit dem Radius C_0C einen Kreisbogen beschreiben, welcher G_0 in C' trifft, d. h. $C_0C' = C_0C$ macht; und dann würden die Linien $A'C'$ und A_2C_0, da wo sie sich schneiden, gerade wie vorher, das perspektivische Bild c von C geben.

Weil aber dieses Umklappen der Zeichnung um G_0 als Axe (dieses abermalige Zeichnen derselben, in umgekehrter Lage, wie solches nach §. 271. geschehen muß) bei weitem mehr Mühe macht, als bei dieser letztern Anordnung erspart wird, so wird der Praktiker jedesmal die Methode des §. 386. selbst vorziehen.

Anmerkung 2. Dem Praktiker muß es zunächst darum zu thun seyn, gerade Linien, eine allein und dann mehrere in Verbindung, dergestalt perspektivisch zeichnen zu können, daß die verschiedenen Hülfslinien der Zeichnung sich vereinigen, um nicht für jeden einzelnen zu entwerfenden Punkt der Figur lauter neue

Hülfslinien nöthig zu haben. So ist z. B. in der Zeichnung des §. 386. der Punkt A′ für die Entwerfung aller der Punkte B, C, D, E jedesmal derselbe geblieben, und es wäre sehr unpraktisch gewesen, wenn man für einen andern der perspektivisch zu entwerfenden Punkte auch einen andern Hülfspunkt statt A′, etwa A″, oder O oder O′ (Fig. 104.) hätte nehmen wollen, obgleich die Theorie (nach §. 384.) solches gut geheißen hätte.

Es mögen daher hier zunächst einige Betrachtungen stehen, welche das praktische Arbeiten durch praktische Regeln zu fördern im Stande seyn werden.

§. 387. Lehrsatz und Erklärungen.

Denkt man sich zwei parallele Linien BC und DE (ohne Figur), welche hinter der Tafel in beliebigen horizontalen Ebenen liegen, (entweder beide in derselben oder in verschiedenen solchen Ebenen) und nun durch das Auge A noch eine mit BC und DE parallele Linie AV, so bilden diese drei Linien (den Fall ausgenommen, wo beide Linien BC und DE in die Horizontal-Ebene des Auges fallen, und in welchem alle drei Linien BC, DE und AV in eine und dieselbe Ebene zusammenfallen werden) einen prismatischen Raum (in so fern zwischen jedem Paare der parallelen Linien eine Ebene gedacht werden kann) und solcher wird von der Ebene der Tafel G_2 geschnitten, und die Durchschnittslinien bc und de dieser Ebene der Tafel G_2 mit den Ebenen AVBC und AVDE geben die Richtungen der perspektivischen Bilder von BC und DE.

1) Sind nun BC und DE mit der Tafel G_2 oder mit der Grundlinie G_0 parallel, so ist auch AV mit G_2 parallel, und dann sind auch die drei Durchschnittslinien der drei Ebenen AVBC, AVDE und G_2, d. h. bc, de und AV mit einander und mit der Grundlinie G_0 parallel.

2) Sind aber BC, CD mit G_2 nicht parallel (also auch nicht mit G_0), so schneiden sich dieselben drei Durchschnittslinien bc, cd und AV in einem und demselben Punkte V, und da AV

parallel ist mit den in horizontalen Ebenen liegenden Linien BC, DE, so liegt AV selbst in einer horizontalen Ebene, also in der Horizontal-Ebene des Auges; und deshalb liegt der Durchschnittspunkt V der drei Linien bc, de und AV allemal in der Horizontallinie A'A'' des Auges A, und zwar da, wo die aus dem Auge mit BC oder DE parallel gedachte Linie, die Horizontallinie trifft.

Dieser Punkt V, in welchem das verlängerte Bild irgend einer Linie bc die Horizontallinie des Auges A'A'' trifft, heißt gewöhnlich der Vertiefungspunkt dieser Linie. Und es haben also horizontale und parallele Linien, sie mögen in einer oder in verschiedenen Ebenen liegen, jedesmal einen und denselben Vertiefungspunkt.

§. 388. Zusätze.

Aus diesen Betrachtungen gehen folgende praktische Regeln hervor:

1) Sind zwei oder beliebig viele Linien BC, DE, ꝛc. ꝛc. unter sich und mit der Grundlinie G_0 parallel, so laufen auch ihre perspektivischen Zeichnungen bc, de, ꝛc. ꝛc. unter sich und mit der Grundlinie G_0 parallel.

Note. Man wird daher von jeder dieser Linien BC, DE, ꝛc. nur einen einzigen Punkt b, d, ꝛc. perspektivisch zu entwerfen haben, um in diesem Falle sogleich die Perspektive bc, de, ꝛc. der Richtungen BC, DE, ꝛc. mit G_0 parallel ziehen zu können.

2) Sind zwei oder beliebig viel Linien BC und DE, die in horizontalen Ebenen liegen, unter sich, aber nicht mit G_0 parallel, so schneiden sich ihre perspektivischen Zeichnungen be, de, ꝛc. alle in einem und demselben Vertiefungs-Punkte V der Horizontallinie A'A'' des Auges, welcher dann auch der Grenz- oder Verschwindungspunkt (Incidenzpunkt) derselben heißt; und dieser Punkt V liegt da, wo die aus dem Auge A mit BC, DE, ꝛc. parallel gedachte Linie die Horizontallinie des Auges trifft.

Daher liegt

3) der Vertiefungspunkt V in dem Hauptpunkte A_2 selber, wenn BC, DE, ꝛc. zugleich auf der Ebene der Tafel G_2 oder auf der Grundlinie G_0 senkrecht stehen; er liegt desto weiter von dem Hauptpunkte A_2 entfernt, je kleiner die Winkel werden, welche BC, DE, ꝛc. mit G_2 oder G_0 machen, und man kann auch sagen, er liege im Unendlichen, wenn BC, DE, ꝛc. einen unendlich kleinen Winkel mit G_2 oder G_0 machen, d. h. mit G_2 oder G_0 parallel laufen, obgleich dies letztere dann nur eine Redensart, und der Fall der N. 1. damit gemeint ist.

Note. Kennt man daher (in der Horizontallinie des Auges) den Vertiefungspunkt V zweier oder beliebig vieler unter sich paralleler horizontaler Linien, so braucht man von jeder der Linien BC, DE, ꝛc. nur noch das Bild eines Punktes, b, d, ꝛc. zu zeichnen, um dann sogleich die Bilder bV, dV, ꝛc. der Richtungen BC, DE, ꝛc. zeichnen zu können.

Anmerkung 1. Dieselbe Betrachtung des §. 387. kann auch noch angestellt werden, wenn die Linien BC, DE nicht in horizontalen Ebenen liegen, und man findet:

1) Laufen BC, DE, ꝛc. unter sich und mit der Tafel G_2 parallel, so laufen auch ihre Bilder bc, de, ꝛc. mit einander parallel.

2) Sind BC, DE, ꝛc. unter sich, aber nicht mit der Tafel G_2 parallel, so schneiden sich ihre Bilder bc, de, ꝛc. in einem Punkte V der Tafel, welcher da liegt, wo die durch das Auge mit BC, DE ꝛc. parallel gezogene AV die Tafel trifft, also oberhalb oder unterhalb der Horizontallinie A′A″, je nachdem die Linien BC, ꝛc. von unten nach oben zu oder von oben nach unten zu, sich immer mehr von der Tafel G_2 entfernen. Auch dieser Punkt V kann der Grenzpunkt der parallelen Linien BC, DE, ꝛc. genannt werden; jedoch soll in diesem Kapitel von solchem Falle nicht weiter die Rede seyn, weil hier jedesmal nur horizontale Linien in Betrachtung kommen sollen.

Anmerkung 2. Weil ein Punkt in der Grundlinie G_0 oder überhaupt ein Punkt in der Tafel G_2 zu gleicher Zeit sein perspektivischer Punkt ist, so darf man nur die gegebenen Linien hinter der Tafel gehörig verlängern, bis solche G_0 oder die Ta-

fel G_2 in den Punkten α, β, γ, ꝛc. treffen, so sind diese Punkte α, β, γ, ꝛc. bereits Punkte der perspektivischen Linien. Kennt man also den Vertiefungspunkt V, so darf man nur die Linien αV, βV, γV, ꝛc. ꝛc. ziehen, um sogleich die perspektivischen Richtungen der hinter der Tafel gegebenen horizontalen Linien zu haben (ohne Figur).

Wünscht man aber zugleich die perspektivischen Linien ihrer Länge nach, so reicht dieses Mittel nicht aus, sondern man muß auf irgend eine Weise noch die Endpunkte derselben bestimmen.

Note. Bei architektonischen Zeichnungen kommt es jedoch sehr häufig vor, daß man eine gegen die Tafel G_2 schief stehende vertikale ebene Zeichnung (z. B. die gegen die Tafel G_2 schief stehende Fronte eines Gebäudes) perspektivisch zu entwerfen hat, in welcher vorzüglich vertikale und horizontale (also mit einander parallele) Linien vorkommen. Die Bilder der vertikalen Linien sind ebenfalls vertikale (also auch unter sich parallele) Linien und können zuerst dadurch gefunden werden, daß man jedesmal einen ihrer Punkte perspektivisch entwirft. Die horizontalen Verbindungslinien werden dann am bequemsten mittelst des Vertiefungspunktes gezeichnet, indem man auf einer der vertikalen Linien, die perspektivischen Abstände (Höhen) der horizontalen Linien von einander, abträgt, und so die zweiten Punkte der perspektivischen Horizontallinien erhält (die alle nach dem Vertiefungspunkte hin laufen), während man sie jedesmal nur zwischen denjenigen perspektivischen vertikalen Linien wirklich auszeichnet, zwischen deren Originallinien sie im Originale liegen.

Man hat jedoch für diesen Fall noch andere, später anzugebende praktische Hülfsmittel.

Anmerkung 3. Weil der von dem Auge A nach dem Vertiefungspunkte V gehende Strahl die parallelen Linien BC, DE, ꝛc. gar nicht mehr trifft, so hören diese letztern Linien in V auf gesehen zu werden, so daß man die Bilder unendlicher paralleler Linien nur bis zu dem Vertiefungspunkte (Grenzpunkte) hin ziehen darf, in welchem sich alle vereinigen. — Eben deshalb dürfen also die Bilder aller auf die Tafel senkrechter Linien, wenn sie sonst in's Unendliche fortgehen, nur bis an den Hauptpunkt A_2 hin gezeichnet werden. Und gehen parallele Linien BC, DE, ꝛc. nicht in's Unendliche fort, so reichen ihre Bilder auf der Tafel auch nicht bis zu dem Grenzpunkte hin.

Anmerkung 4. Auch erhellet noch daraus, daß die Bil-

der gerader horizontaler Linien sich desto mehr der Horizontallinie des Auges nähern, je entfernter sie sind, so nämlich, daß die entferntesten Theile dem Horizonte am nächsten erscheinen, sie mögen nun über oder unter dem Horizonte liegen.

Dies gilt aber auch von krummen Linien, welche in einer horizontalen Ebene (d. h. deren Punkte gleich hoch) liegen, oder überhaupt von Punkten, die gleich hoch liegen; die entferntesten kommen der Horizontallinie des Auges am nächsten, sie mögen übrigens über oder unter dem Horizonte des Auges liegen.

Und Punkte im Unendlichen verlieren sich in dem Horizonte.

§. 389. Aufgabe.

Von parallelen horizontalen Linien BC, DE, ꝛc., deren Winkel mit der Tafel G_2, nämlich φ, bekannt ist, den Grenz- oder Vertiefungspunkt V zu finden.

Auflösung. Die Linie AV, vom Auge A nach dem gesuchten Vertiefungspunkte V, bildet mit der Augen-Axe AA_2 und der Horizontallinie A_2V ein rechtwinkliches Dreieck AA_2V, von welchem die Kathete AA_2 und der gegenüberliegende Winkel $= \varphi$ bekannt sind, weil AV mit BC, parallel ist, daher mit G_2 oder $A'A''$ denselben Winkel φ bildet. Denkt man sich daher dieses Dreieck um A_2V auf G_2 geklappt, so wird A in die Vertikallinie etwa in O fallen, so daß $A_2O = AA_2$ ist.

Man nehme also (Fig. 108.) auf der Vertikallinie A_2A_0 einen Punkt so an, daß $A_2O = AA_2$ wird, trage irgendwo, z. B. von dem Punkte A_2 aus, an die Horizontallinie den gegebenen Winkel φ (mache nämlich $\alpha A_2A' = \varphi$), und ziehe zuletzt durch O eine mit αA_2 parallele Linie, so ist der Punkt V, wo solche die Horizontallinie schneidet, der gesuchte Grenz- oder Vertiefungspunkt.

Anmerkung 1. Man könnte auch nach dem Vertiefungspunkte einer einzigen gegebenen Linie BC fragen, welche mit G_2 oder G_0 den Winkel φ bildet.

Anmerkung 2. Den Punkt O in der Vertikallinie

(Fig. 108), der so liegt, daß $A_2O = AA_2$ ist, nennt man vorzugsweise den Hülfspunkt; während die Punkte A' und A", welche so liegen, daß ebenfalls $A'A_2 = A''A_2 =$ dem Augen-Abstand AA_2 ist, die Distanzpunkte genannt werden.

Anmerkung 3. Der Vertiefungspunkt kann bei Linien, welche mit der Grundlinie kleine Winkel bilden, in so großer Entfernung von der Tafel fallen, daß ihn der Zeichner nicht mehr benutzen kann. In solchen Fällen ist es wünschenswerth, durch gegebene Punkte auf der Tafel perspektivisch parallele Linien bequem zeichnen zu können, ohne den Vertiefungspunkt zu gebrauchen. Deshalb die nächste Aufgabe.

§. 390. Aufgabe.

Es ist von einer Linie BC ihr Bild bc und von einer andern mit ihr parallelen Linie DE das Bild d eines ihrer Punkte D gegeben; man soll durch d die mit bc perspektivisch parallele Linie (d. h. das Bild von DE) zeichnen, ohne den Vertiefungspunkt zu kennen, oder für den Fall, daß der Vertiefungspunkt sehr weit entfernt ist (Fig. 109.).

Auflösung. Weil die Horizontallinie A'A" des Auges und die gegebene Linie bc und endlich die gesuchte Linie de in einem und demselben (Vertiefungs-) Punkte zusammen laufen; so hat man bloß durch d eine Linie de so zu ziehen, daß sie gehörig verlängert mit bc und A'A" in einem und demselben Punkte zusammen treffe und diese Aufgabe ist bereits in der ebenen Geometrie (Bd. II. §. 138. N. 15.) gelöst.

Es kommt nämlich darauf an, durch d eine Linie $d\varepsilon$, irgendwo aber z. B. durch A" eine mit $d\varepsilon$ parallele Linie $A''\gamma$ zu ziehen, letztere aber in β so zu theilen, daß die Stücke $d\delta$, $d\varepsilon$, $\gamma\beta$ und $A''\beta$ in Proportion stehen.

Da nun gewöhnlich $A''\gamma$, als Rand der Tafel betrachtet, schon vertikal ist, so ziehe man noch durch d, $d\varepsilon$ parallel mit $A''\gamma$, dann $A''\delta$, ferner $d\alpha$ parallel mit $\varepsilon A''$ und zuletzt $\alpha\beta$ pa-

rallel mit $\gamma\delta$, und $d\beta$ ist dann die gesuchte mit bc perspektivisch parallele Linie.

§. 391. Betrachtung.

Schneiden sich zwei horizontale Linien BC, CD (Figg. 110. und 111.) hinter der Tafel in dem Punkte C, so schneiden sich auch ihre perspektivischen Linien bc, cd in dem Bilde c des Punktes C; und denkt man sich von dem Auge A aus, Linien $A\beta$, $A\delta$ parallel mit BC, CD, so treffen solche, gehörig verlängert, die Horizontallinie des Auges $A'A''$ in den Punkten β und δ, und in dieselben Punkte treffen auch die Bilder bc, cd, weil diese Punkte β, δ bezüglich die Vertiefungs-Punkte der Linien BC, CD sind, d. h. weil $A\beta BC$, $AA'A''$ und G_2 drei Ebenen sind, die sich wechselseitig schneiden und daher drei Durchschnittslinien bilden $A\beta$, bc und $A'A''$, welche in einem und demselben Punkte β zusammentreffen müssen; und weil aus demselben Grunde auch δ der Vereinigungspunkt der drei Durchschnittslinien $A\delta$, cd und $A'A''$ seyn muß.

Kennt man also die Punkte β und δ, in denen die mit BC und CD parallelen Linien $A\beta$ und $A\delta$ die Horizontallinie $A'A''$ des Auges treffen, und außerdem nur noch das Bild c des Punktes C, so darf man nur $c\beta$ und $c\delta$ ziehen, um sogleich in $\beta c\delta$ den perspektivischen Winkel des BCD zu haben.

Denkt man sich aber die Ebene $\beta A\delta$ um $\beta\delta$ auf G_2 geklappt, so fällt A in den Hülfspunkt O, und βA, δA mit βO, δO zusammen, so daß βO und δO mit der Vertikallinie A_2O dieselben Winkel bilden, welche βA, δA mit der Augen-Axe AA_2 bildeten, also dieselben, welche BC, CD mit der durch C auf G_2 gezogenen senkrechten Linie CH bilden, weil parallele Linien allemal gleiche Winkel einschließen. Hierauf gründet sich die Einrichtung des perspektivischen Winkelmessers; zunächst aber die Lösung nachstehender

§. 392. Aufgabe.

Einen hinter der Tafel gegebenen horizontalen Winkel BCD perspektivisch zu zeichnen (Fig. 110.).

Auflösung 1. Man suche das Bild c (Fig. 111.) seiner Spitze C, dann die Bilder b, d, eines in jedem der beiden Schenkel angenommenen Punktes B, D, und ziehe dann die Linien cb und cd, so ist bcd das gesuchte Bild des Winkels BCD *).

Auflösung 2. Man ziehe durch C (Figg. 110. u. 111.) eine Linie CFH senkrecht auf G_o; ziehe dann in der Ebene der Tafel, wenn O der Hülfspunkt ist, $O\beta$, $O\delta$ so, daß $W.\beta OA_2 = W.HCB$ und $W.\delta OA_2 = W.HCD$ wird, verlängere $O\beta$ und $O\delta$, bis sie die Horizontallinie des Auges $A'A''$ in β und δ treffen; zeichne dann bloß die Spitze C perspektivisch, und ziehe, wenn c das Bild von C ist, zuletzt $c\beta$ und $c\delta$, so ist $\beta c\delta$ das Bild des Winkels BCD.

Anmerkung 1. Ist BCD′ der gegebene Winkel, so macht man $W.\delta'OA_2 = W.HCD'$ und $\beta c\delta'$ ist dann das Bild des Winkels BCD′.

Und ist BCD″ der gegebene Winkel, so macht man $W.\delta_2 OA_0 = FCD''$, verlängert $\delta_2 O$, bis solche die Horizontallinie des Auges in δ'' trifft, zieht $\delta'' c$, verlängert solche nach δ_1, und $\beta c\delta_1$ ist dann das Bild des Winkels BCD″.

Anmerkung 2. Wäre der Winkel BCE perspektivisch zu zeichnen, wenn CE parallel ist mit dem Horizonte, so ziehe man $O\varepsilon$ parallel mit G_o, mache $W.\varepsilon O\beta = W.ECB$ oder $W.A_2 O\beta = W.HCB$, ziehe $c\beta$ und auch ce parallel mit $O\varepsilon$, und βce wird das Bild des Winkels BCE seyn.

Eben so ist dann auch δce das Bild des Winkels DCE, und $\delta' ce$ das Bild von D′CE, und $\delta_1 ce$ das Bild von D″CE; u. s. w.

---

*) Diese Auflösung fände auch statt, wenn der Winkel nicht in einer horizontalen Ebene läge, sondern beliebig hinter der Tafel gegeben wäre.

§. 393. Zusatz.

Wäre der Winkel BCD gegeben und würde verlangt, sein Bild an eine in der Tafel gegebene Linie cb anzutragen, so würde man cb verlängern, bis sie die Horizontallinie des Auges in β trifft, dann βO ziehen, W. βOδ= dem gegebenen Winkel BCD machen, Oδ bis an den Horizont (d. h. bis an δ) verlängern und zuletzt cδ ziehen, so ist βcδ das Bild von BCD, an cβ angetragen.

§. 394. Zusatz.

Ist umgekehrt das Bild bcd eines Winkels BCD gegeben und wollte man daraus die Größe des Original-Winkels BCD finden, so würde man bc, dc bis an die Horizontallinie des Auges, d. h. bis nach β und δ verlängern, und hernach βO, δO ziehen, so ist βOδ die Größe des Winkels BCD *).

§. 395. Zusatz.

Wäre bei der Aufgabe des §. 393. der Winkel BCD nur in Graden gegeben gewesen, so hätte man auch βOδ mittelst eines gewöhnlichen Transporteurs in Graden aufgetragen, welches an der Construktion selbst nichts weiter geändert hätte.

Sollte aber in der Aufgabe des §. 394. aus dem gegebenen perspektivischen Winkel bcd die Größe seines Original-Winkels in Graden ausgedrückt gefunden werden, so dürfte man nur den Winkel βOδ, welcher dieser Original-Winkel ist, mittelst eines gewöhnlichen Transporteurs in Graden bestimmen.

Anmerkung. Bei perspektivischen Zeichnungen, in welchen viele Winkel abzutragen sind, kann es zuweilen Bequemlichkeit gewähren, an O und auf jeder Seite von OA_2 gleich vom Anfange an mittelst eines gemeinen Transporteurs die Winkel von

$1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, \cdots 15^0, \cdots 30^0 \cdots 45^0 \cdots 60^0$ u. s. f.

---

*) Alles dieses gilt nämlich unter der Voraussetzung, daß O der Hülfspunkt ist, d. h. daß A_2O= dem Augen-Abstand A_2A genommen worden ist.

bis nahe an 90°, oder wenigstens bis so weit, als es nöthig scheint, ein für allemal abzutragen, in der Horizontallinie des Auges die Punkte zu bemerken, wo die verlängerten Schenkel sie treffen, und letztere dann mit der Gradzahl des Winkels zu bezeichnen.

Die so eingetheilte Horizontallinie A'A'' (Fig. 111.) heißt dann ein perspektivischer Transporteur (perspektivischer Winkelmesser) und ist er einmal verfertigt, so gewährt er den Vortheil, daß man die Grade des Winkels βOδ auf der Linie βδ sogleich ablesen kann. — Doch würde diese Eintheilung die darauf verwandte Mühe nicht lohnen, wenn man nicht in einer und derselben Zeichnung sehr vielfältigen Gebrauch davon machen könnte.

§. 396. Aufgabe.

Ein horizontales Dreieck BCD perspektivisch zu zeichnen.

Auflösung. Man zeichne eine Seite BC perspektivisch, und wenn bc das Bild von BC ist, so trage man an b und an c (nach §. 392.) die perspektivischen Winkel cbd und bcd der Winkel CBD und BCD, und man hat das verlangte Dreieck bcd.

§. 397. Zusatz.

Auf ähnliche Weise kann eine beliebige geradlinige Figur, z. B. BCDEFH perspektivisch gezeichnet werden, wenn sie nur horizontal liegt. Man findet zuerst das Bild bc einer Seite BC; zieht dann die Diagonalen BD, BE, BF, ꝛc. construirt die perspektivischen Dreiecke bcd, bde, bef, bfh, indem man immer an die eine durch das vorhergehende Dreieck bereits gegebene Seite, die beiden perspektivischen Winkel anträgt.

§. 398. Zusatz.

Aber auch eine Kreislinie kann auf diese Art perspektivisch gezeichnet werden. Da nämlich in einer Kreislinie der Winkel an der Peripherie, welcher zugleich auf dem Durchmesser steht, ein rechter ist, so zeichnet man das Bild eines Durchmessers und

trägt nun an beide Enden dieses Bildes fortwährend Winkel perspektivisch an, deren Summe $=90^\circ$ ist, so ist der dritte Winkel die Perspektive eines Winkels von 90° und seine Spitze ein perspektivischer Punkt der Kreislinie *).

Oder man ziehe (Fig. 112.), wenn bc das Bild des Durchmessers ist, eine beliebige Linie $b\alpha$ bis zur Horizontallinie, nehme von α bis β, 90° auf dem perspektivischen Transporteur (und wenn man sich keinen perspektivischen Winkelmesser construirt hat, ziehe man αO und errichte auf diese Linie von O aus eine Senkrechte $O\beta$) und ziehe die Linie $c\beta$, welche die $b\alpha$ in e schneidet, so ist bcc ein perspektivischer Winkel von 90°, also e ein Punkt in der perspektivischen Kreislinie.

Und zieht man dann noch αc und βb, so ist der Punkt d, in welchem sich diese Linien schneiden, wiederum ein Punkt der Kreislinie. Und macht man Winkel $\alpha' O\beta'$ abermals 90°, so erhält man noch zwei Punkte e' und d' dieser Kreislinie; u. s. w. f.

Auch kann man sich desselben Mittels bedienen, um zu einer bereits perspektivisch entworfenen Kreislinie für jeden angenommenen Punkt b den Durchmesser zu finden. Man ziehe nämlich eine beliebige Sehne, z. B. bf und trage an bf von f aus einen perspektivischen Winkel bfc von 90° (indem man bf bis γ verlängert, W. $\gamma O\delta = 90^\circ$ macht und $f\delta$ zieht), so wird der Punkt c, in welchem der zweite Schenkel fc das Bild der Kreislinie trifft, der zweite Punkt des perspektivischen Durchmessers seyn.

Und zieht man zwei Durchmesser, so ergiebt sich auch das Bild m des Mittelpunktes der Kreislinie.

Note. Uebrigens übersehe man nicht:

1) Alle diese Construktionen und namentlich auch alle diese Anwendungen des perspektivischen Transporteurs, gelten nur unter der

---

*) Da die Perspektive eines Dreiecks allemal selber wieder ein Dreieck ist, so muß, wenn zwei Winkel des Dreiecks perspektivisch entworfen sind, und das Dreieck vollends ausgezeichnet ist, der dritte Winkel des perspektivischen Dreiecks allemal auch das Bild des dritten Original-Winkels seyn.

Voraussetzung, daß die Original-Figuren in einer Horizontal-Ebene liegen, d. h. entweder in der Grund-Ebene G_1, oder in einer andern mit ihr parallelen.

2) Alle diese letztern perspektivischen Entwerfungen konnten auch dadurch ausgeführt werden, daß man, in der geradlinigen Figur alle Eckpunkte, in der Kreislinie aber mehrere einzelne nahe genug liegender Punkte (nach §. 385.) perspektivisch entworfen und im erstern Falle die Eckpunkte durch gerade Linien, im andern Falle dagegen die einzelnen Punkte aus freier Hand zusammengezogen hätte.

3) Man wird sich daher des perspektivischen Transporteurs vorzüglich da bedienen, wo die zu zeichnenden Figuren nicht wirklich in der Zeichnung, sondern nur durch Angabe der Maaße der sie bestimmenden Winkel und Linien gegeben sind, weil es dann oft nicht nöthig seyn wird, die Original-Zeichnung selbst anzufertigen und die perspektivische Zeichnung doch wird hergestellt werden können.

In diesem letztern Falle gebraucht man aber auch noch ein Mittel, um aus der in Zahlen ausgedrückten Länge einer Linie, oder aus den in Zahlen ausgedrückten Coordinaten eines Punktes, der (nach §. 385.) perspektivisch gezeichnet werden soll, die Linie oder den Punkt unmittelbar perspektivisch entwerfen zu können, ohne erst die Original-Abmessungen als Linien selbst ausgedrückt zu haben. Dieses Mittel nun bietet der nächste Paragraph.

§. 399. Aufgabe.

Es ist in der Grund-Ebene (Fig. 105.) ein Punkt B durch seine schiefe Entfernung $B\alpha$ von der Grundlinie G_0 und den Winkel $B\alpha\beta = \varphi$, welche solche Linie $B\alpha$ mit der Grundlinie G_0 bildet, und noch die Entfernung αA_0 vom Grundpunkte A_0 gegeben; man soll den Punkt B perspektivisch zeichnen.

Auflösung. Man mache $\alpha\beta = \alpha B$, so daß $B\alpha\beta$ ein gleichschenkliches Dreieck wird, trage dann auf der Grundlinie G_0 (Fig. 113.) in der Ebene der Tafel G_2, von dem Grundpunkte A_0 aus, die in der Original-Grund-Ebene (Fig. 105.) gegebene Entfernung $A_0\alpha$ ab, d. h. man mache $A_0\alpha' = A_0\alpha$, um auf der Ebene der Tafel G_2 den Punkt α (in Fig. 105.) zu erhalten, in welchem die $B\alpha$ die Grundlinie G_0 trifft; mache dann $\alpha' B_0 = \alpha B = \alpha\beta$ und construire über $\alpha' B$ das gleichschenkliche Dreieck $\alpha B\beta$ perspektivisch, nämlich $\alpha' B_0 b$ (in so fern das Bild $\alpha' B_0$ mit dem Originale $\alpha\beta$ zusammenfällt und die Winkel $\beta\alpha B = \varphi$, $\beta B\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$ und $B\beta\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$ gegeben sind), so ist b das gesuchte Bild von B.

Das praktische Geschäft besteht also eigentlich in folgender Operation:

Man bestimme in der Ebene der Tafel (Fig. 113.) zuerst α', mache $\alpha' B_0 = \alpha\beta$ ($\alpha\beta = \alpha B$ ist gegeben), ziehe durch den Hülfspunkt O (wo $A_2 O = A A_2$ ist) eine Linie OV, welche mit OA_2 den Winkel $90^0 - \varphi$, oder mit der horizontalen OM den Winkel φ macht (während der Winkel φ gegeben ist), ziehe dann $V\alpha'$, mache Vt auf dem perspektivischen Transporteur $= 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$ (oder, was dasselbe ist, ziehe Ot so, daß $VOt = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$ wird) und lege dann durch den so bestimmten Punkt t die Linie tB_0, so wird letztere die $V\alpha'$ in dem gesuchten Punkte b treffen, weil dann der Winkel tbV oder $\alpha' b B_0$ in der That perspektivisch $90^0 - \frac{1}{2}\varphi$ hat, während der Winkel $b\alpha' B_0$ perspektivisch φ Grade haben wird.

In dieser Construktion kommt alles darauf an, den Punkt t zu haben. Weil aber dieser so bestimmt werden muß, daß W. $VOt = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$ wird und nach der Annahme $tVO = \varphi$ ist, so darf man nur $Vt = VO$ machen, und dann bedarf man weder des perspektivischen Transporteurs, noch sonst irgend eines Abtragens eines Winkels, weil nun schon $VOt = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$ seyn wird. Selbst die Linie Ot zu ziehen, ist jetzt unnütz, weil man nur aus V mit der Eröffnung VO einen Kreisbogen beschreiben, d. h. VO auf VA' abtragen darf.

§. 400. Zusatz.

Einigen Vortheil wird diese Construktion bringen, wenn eine Linie AF (Fig. 105.) soll perspektivisch entworfen werden, unter der Voraussetzung, daß der Winkel φ gegeben ist, den ihre Richtung $FB\alpha$ mit der Grundlinie G_0 macht, und außerdem noch die schiefen Abstände $B\alpha$ und $F\alpha$ (oder einer dieser beiden Abstände und die wahre Länge von BF) gegeben sind.

Da nämlich in diesem Falle in dem Dreiecke $\alpha F\gamma$ (wenn $\alpha\gamma = \alpha F$ gemacht worden) ganz dieselben Winkel statt finden, wie in dem Dreiecke $\alpha B\beta$, so wird man nichts weiter nöthig

haben, als, nachdem der Punkt B wie im vorhergehenden §. 399. perspektivisch gezeichnet ist, noch (Fig. 113.) $\alpha' F_0 = \alpha F$ zu machen, und durch F_0 mit bB_0 eine Linie perspektivisch parallel zu ziehen, welches dadurch bewirkt wird, daß man von demselben (Vertiefungs-) Punkte t aus, tF_0 zieht. Der Punkt f, wo solche Linie tF_0 die $V\alpha'$ trifft, ist das gesuchte Bild von F; und demnach bf das gesuchte Bild von BF.

Das rein praktische Geschäft wird also folgendes seyn: Man bestimme α' auf G_0 in der Ebene der Tafel durch die gegebene Entfernung αA_0, mache dann $\alpha' B_0 = \alpha B$ und $B_0 F_0 = BF$, ziehe OV so, daß $A_2 OV = 90_0 - \varphi$ wird, mache $Vt = VO$, ziehe $V\alpha'$, tB_0 und tF_0, und wo letztere beiden Linien von der erstern geschnitten werden, da sind die gesuchten Bilder b und f der Punkte B und F in der Grund-Ebene G_1 (Fig. 105.).

§. 401. Zusatz.

Es ist diese Construktion besonders deshalb so wichtig, weil es im praktischen Zeichnen so häufig der Fall ist, daß man von einem zu suchenden Bilde bf einer Linie BF bereits die Richtung und einen ihrer Endpunkte, z. B. b hat, und nun noch der andere Endpunkt f gewünscht wird.

In solchem Falle wird man die schon bekannte Richtung bf verlängern, bis sie die Horizontallinie $A'A''$ in V trifft, dann $Vt = VO$ machen, tb ziehen und bis zu B_0 hin verlängern, dann $B_0 F_0 =$ der gegebenen Länge BF machen (mag BF als Linie unmittelbar gegeben seyn, oder als benannte Zahl, auf irgend einen Maaßstab als Einheit bezogen) und zuletzt tF_0 ziehen, welche die Richtung bV in dem gesuchten Bilde f schneidet.

§. 402. Zusatz.

Aber noch wichtiger wird diese Construktion durch den Umstand, daß bf die perspektivische Länge und $B_0 F_0$ die wahre Länge von BF ist.

Hat man also ein Bild bf auf der Tafel (Fig. 113.) und

wünscht man die wahre Länge des zugehörigen in der Grund-Ebene G_1 liegenden Originals BF (Fig. 105.), so mache man nur, nachdem bf bis V verlängert ist, $Vt = VO$, ziehe tb, tf und verlängere solche, bis sie die Grundlinie G_0 in B_0, F_0 treffen, so ist B_0F_0 die wahre Länge von BF.

Und wäre das Original BF in mehrere gleiche oder ungleiche Theile getheilt, so dürfte man nur B_0F_0 gerade eben so theilen, und dann von t aus nach den Endpunkten dieser einzelnen Theile gerade Linien ziehen (welche die Vbf schneiden würden) und diese Linien würden dann in bf dieselbe perspektivische Theilung verrichten.

Der Punkt t, wenn er zu diesem Behufe benutzt wird, heißt dann der Theilungspunkt von bf.

Anmerkung. Um den erstern dieser wichtigen Sätze (durch welchen man sich in den Stand gesetzt sieht, aus der perspektivischen Zeichnung eines Gegenstandes sich von der wahren Größe seiner einzelnen Dimensionen zu vergewissern) noch praktischer zu machen, pflegt man noch auf G_0 von A_0 aus den Maaßstab des Originals sogleich abzutragen, um diese wahren Längen, wie B_0F_0, sogleich als benannte Zahlen ausdrücken zu können. Man verbindet damit gewöhnlich noch eine Eintheilung des auf G_0 senkrechten Randes der Tafel, welche zu andern Zwecken benutzt werden kann. Dies mag der folgende Paragraph näher erörtern.

§. 403. Bemerkung und Erklärung.

Denkt man sich auf der Linie A_0W, in welcher die Vertikal-Ebene des Auges die Grund-Ebene G_1 schneidet, von A_0 aus, den Maaßstab abgetragen, womit die Originallinien gemessen werden sollen, so daß (Fig. 114.) $A_0\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, ꝛc. solche einzelne Fuße (Zolle, oder dergl.) vorstellen, und dann durch das Auge A nach A_0, α, β, γ, δ, ε, ꝛc. gerade Linien, so werden diese die Vertikallinie A_0A_2 (Fig. 115.) in den entsprechenden Punkten A_0, α', β', γ', δ', ꝛc. treffen; und jeder

Punkt in der Grund-Ebene, welcher von G_0 so weit absteht, als z. B. δ (welcher mit δ einerlei Tiefe hat), erscheint dem Auge auf der Tafel nothwendig in derselben Höhe über G_0 als δ'. — Zieht man daher z. B. durch δ' eine mit G_0 parallele Linie $\delta' p$, so liegen in ihr die Bilder aller der Punkte, welche mit δ (Fig. 114.) einerlei Tiefe haben, d. h. welche von G_0 eben so weit abstehen als δ.

Um dies praktisch benutzen zu können, pflegt man der Tafel folgende Vorrichtung zu geben (Fig. 115.). Man trägt von A_0 aus rechts und links auf der Grundlinie G_0 die einzelnen Theile des Original-Maaßstabes ab, so hat man die Scale der Tafel; errichtet dann in einem der Theilstriche, z. B. M eine senkrechte MN bis zur Horizontallinie, macht NH dem Augen-Abstande AA_2 gleich, und zieht nun nach den Theilungspunkten der Scale die geraden Linien von H aus, so werden solche die MN in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ꝛc. treffen und diese bezeichnen nun die Höhe der Bilder über G_0, deren Originale in der Grund-Ebene G_1 von der Grundlinie G_0 um 1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc. ꝛc. Fuße (Zolle, oder dergl.) abstehen, wie der vorhergehenden Betrachtung zu Folge in die Augen fällt.

Diese Eintheilung der Linie MN nennt man einen Tiefen-Maaßstab, und ein solcher ist für Punkte, welche in der Grund-Ebene liegen, mit Vortheil zu gebrauchen.

Anmerkung. Um dies durch ein Beispiel noch zu erläutern, sey in der Grund-Ebene (Fig. 114.) ein Punkt B gegeben, dessen Tiefe 4 Fuß, und dessen Abstand von der Vertikal-Ebene des Auges, oder besser von der Hülfs-Grundlinie $A_0 W$ 3 Fuß betragen soll, und solcher auf der Tafel (Fig. 115.) perspektivisch zu zeichnen.

Man ziehe durch 4 des Tiefen-Maaßstabes MN eine Linie p4 parallel mit G_0, so liegt das Bild b von B nothwendig in dieser Linie. Ferner ziehe man von dem Punke 7 der Scale, welcher von A_0 um 3 Fuß absteht, die Linie $A_2 7$, so liegt das Bild b (nach §. 385.) auch nothwendig in dieser Linie. Es

liegt also das Bild b von B da, wo sich die Linien pδ′ und $A_2 7$ schneiden.

Und hat der Punkt C (Fig. 114.) die Tiefe 2 Fuß, und einen Abstand von $A_0 W$ von $2\frac{1}{2}$ Fuß, so nimmt man von A_0 (Fig. 115.) links einen Punkt q, so daß $A_0 q = 2\frac{1}{2}$ Fuß wird, zieht $A_2 q$ und durch den Punkt 2 des Tiefen-Maaßstabes MN die Linie c2 parallel mit G_0, so ist der Punkt c, in welchem sich diese Linien schneiden, das gesuchte Bild von C.

Und dann ist auch die Linie bc das Bild von BC.

§. 404. Lehrsätze.

Um alles Praktische, welches hierher gehört, beisammen zu haben, bemerke man sich nachstehende unmittelbar aus der Definition des Theilungspunktes hervorgehenden Sätze:

I. Jede auf der Ebene der Tafel gegebene Richtung, z. B. bf (Fig. 113.) hat ihren bestimmten Vertiefungspunkt V*), und deshalb auch ihren bestimmten Theilungspunkt t; und der erstere V wird gefunden, wenn man die gegebene Richtung bf bis zum Horizonte A′A″ verlängert; der andere dagegen ergiebt sich, wenn man $Vt = VO$ macht.

II. Alle perspektivischen parallelen Linien haben, weil ihnen ein und derselbe Vertiefungspunkt gehört, nothwendig auch einen und denselben Theilungspunkt.

III. Für alle auf G_0 senkrechten Linien fällt der Vertiefungspunkt V mit dem Hauptpunkte A_2, und daher für diese Linien der Theilungspunkt t mit dem Distanzpunkte A′ zusammen. (Es ist nämlich $A'A_2$ dem Augen-Abstande AA_2 gleich, also auch $= OA_2$.)

IV. Diese Sätze (I. und II.) erleiden eine Ausnahme, wenn die gegebenen perspektivischen Richtungen bf ꝛc. mit dem Horizonte parallel seyn sollten. Dann existirt kein Vertiefungspunkt (oder er liegt im Unendlichen) und zum Theilungspunkte kann

---

*) D. h. wenn man sie verlängert, so schneidet sie den Horizont A′A″.

man dann jeden beliebigen Punkt im Horizonte annehmen, welchen man dann für alle mit dem Horizonte parallelen Linien gemeinschaftlich gelten lassen kann.

§. 405. Aufgabe.

Den Theilungspunkt t einer gegebenen perspektivischen Richtung bf (Fig. 113.) für den Fall zu finden, daß der Vertiefungspunkt V zu entfernt ist, um ihn dazu bequem benutzen zu können.

Auflösung. Man lege durch O eine Linie OS, welche gehörig verlängert mit dem Horizonte A'A'' und der gegebenen Linie bf in einem und demselben Punkte zusammentreffen würde (nach Bd. II. §. 138. N. 15., wie solcher schon hier im §. 390. angewandt worden), ziehe dann durch O die Linie OM mit G_0 parallel und mache A_2Ot der Hälfte des Winkels VOM gleich, so erhält man den verlangten Theilungspunkt t.

Oder man ziehe OS wie vorher, mache Um=UO, ziehe Om und verlängere solche, bis sie den Horizont in t schneidet.

Perspektive.

Zweites Kapitel.

Von der perspektivischen Zeichnung solcher Figuren, welche nicht in horizontalen Ebenen liegen.

§. 406. Aufgabe.

Das Bild einer auf der Grund-Ebene G_1 senkrechten Linie DD_1 zu verzeichnen, wenn ihr Fußpunkt D_1 und ihre Höhe DD_1 gegeben ist (Fig. 116.).

Auflösung. Da D_1 in der Grund-Ebene G_1 gegeben ist, so ist auch der Punkt D_0 gegeben, in welchem die von D_1 auf die Grundlinie G_0 gefällte senkrechte Linie D_1D_0 letztere trifft. Man finde nun zuerst das Bild d_1 des in der Grund-Ebene gegebenen Fußpunktes D_1 (welches in der Linie A_2D_0 liegen muß) nach irgend einer der Methoden des vorhergehenden Kapitels, ziehe D_0D_2 und d_1d parallel mit A_2A_0, mache $D_0D_2 = DD_1$, ziehe A_2D_2, und diese schneidet die Linie dd_1 als das Bild von DD_1 ab.

Oder man bestimme das Bild d_1 von D_1, nehme im Horizonte einen beliebigen Punkt P, ziehe Pd_1, bis solche verlängert die Grundlinie in δ_0 trifft, errichte $\delta_0\delta = D_0D_2 = DD_1$ senkrecht auf G_0 oder parallel mit A_0A_2, ziehe $P\delta$ und durch d_1

die $d_1 d$ parallel mit $A_0 A_2$, so ist dd_1 abermals das gesuchte Bild von DD_1.

Beweis. Denn, denkt man sich noch DD_2 gezogen, so hat man das Rechteck $DD_0D_1D_2$ und DD_2 senkrecht auf der Ebene der Tafel G_2, also parallel mit AA_2, so daß die Dreiecke AA_2d und DD_2d ähnlich seyn müssen, wenn d das Bild von D ist, d. h. wenn A, D und d in einer und derselben geraden Linie liegen. Und umgekehrt, sind diese Dreiecke ähnlich, so müssen A, D und d in einer geraden Linie liegen, und d muß dann das Bild von D seyn.

Es haben aber diese Dreiecke AA_2d und DD_2d den rechten Winkel gleich und man darf also nur noch beweisen, daß die ihn einschließenden Seiten proportionirt sind.

Nun ist nach der ersten Auflösung:

$$1)\quad A_2d : D_2d = A_2d_1 : D_0d_1 ;$$

und weil d_1 das Bild von D_1 ist, so ist A_2D_0 in d_1 dergestalt getheilt, daß sich die Theile verhalten, wie der Augen-Abstand zur Tiefe (nach §. 384.), also:

$$2)\quad A_2d_1 : D_0d_1 = AA_2 : D_1D_0 = AA_2 : DD_2,$$

in so fern $D_1D_0 = DD_2$ ist. — Verbindet man nun die 1. und die 2. mit einander, so ergiebt sich

$$A_2d : D_2d = AA_2 : DD_2 ;$$

also ist $\triangle AA_2d \backsim \triangle DD_2d$

und $\mathfrak{W}. AdA_2 = \mathfrak{W}. DdD_2 ;$

mithin AdD eine gerade Linie und demnach d das Bild von D.

Zieht man nachgehends aus einem beliebigen Punkte P in dem Horizonte $A'A''$ die Linien $Pd_1\delta_0$ und $Pd\delta$ bis die aus δ_0 auf G_0 Senkrechte $\delta_0\delta$ getroffen wird, und zieht man δD_2, so hat man auch noch

$$\triangle Pd_1A_2 \backsim \triangle \delta_0 d_1 D_0,$$

also $A_2d_1 : D_0d_1 = Pd_1 : \delta_0 d_1 ;$

aber $A_2d_1 : D_0d_1 = A_2d : D_2d,$

also $Pd_1 : \delta_0 d_1 = A_2d : D_2d.$

Und weil $\triangle Pdd_1 \backsim \triangle P\delta\delta_0$

ist, so hat man auch noch:

$$Pd_1 : \delta_0 d_1 = Pd : \delta d,$$

also auch $$A_2 d : D_2 d = Pd : \delta d,$$

mithin $$\triangle \delta d D_2 \backsim \triangle Pd A_2,$$

folglich δD_2 parallel mit $A'A''$ oder mit G_0, also auch $\delta_0\delta = D_0D_2 = DD_1$. — Macht man daher umgekehrt $\delta_0\delta = DD_1$, so ist δ derselbe Punkt, welcher mit d und P in einer und derselben geraden Linie liegt.

Anmerkung. Dieselbe Aufgabe findet sich auch schon im §. 381. aufgelöst und die Auflösung ergiebt sich dort unmittelbar. — Das Bild dd_1 einer solchen Vertikallinie DD_1 heißt eine perspektivische Höhe.

§. 407. Zusatz.

Weil die Vertikallinien, wie DD_1, allemal mit der Ebene der Tafel parallel laufen, also auch mit ihrem Bilde dd_1, so sind die Dreiecke ADD_1 und Add_1 allemal ähnlich, und jede vom Auge A nach irgend einem Punkte E in DD_1 gezogene Linie AE trifft das Bild dd_1 in e so, daß die Stücke DE, D_1E und de, d_1e in Proportion stehen müssen. Daraus ergeben sich für die perspektivischen Höhen noch folgende praktische Sätze:

1) Jede perspektivische Höhe steht senkrecht auf der Grundlinie, oder das Bild jeder vertikalen Linie DD_1 ist selber vertikal.

2) Soll das Bild einer in beliebig viele gleiche Theile getheilten vertikalen Linie DD_1 gefunden werden, so finde man die Bilder d, d_1 ihrer Endpunkte und theile das Bild dd_1 in eben so viele gleiche Theile, und diese letzteren Theilstriche werden die Bilder seyn von den Theilstrichen im Original.

Dasselbe gilt auch noch, wenn DD_1 in mehrere Theile nach gegebenen Verhältnissen getheilt ist; man theilt dd_1 nach denselben Verhältnissen und erhält die Bilder der Original-Theilstriche.

3) Die perspektivischen Höhen dd_1, cc_1 gleicher Original-Höhen DD_1, CC_1, (wo also $DD_1 = CC_1$) liegen immer

so, daß wenn man die Linien cd und c_1d_1 zieht, solche sich mit dem Horizonte A'A'' in einem und demselben Vertiefungspunkte vereinigen *).

Anmerkung. Liegen daher die Fußpunkte D_1, C_1, B_1, F_1, ꝛc. gleicher Original-Höhen DD_1, CC_1, BB_1, FF_1, ꝛc., in einer geraden Linie, so liegen ihre Bilder dd_1, cc_1, bb_1, ff_1, ꝛc. ꝛc. zwischen denselben, im Horizonte zusammentreffenden Linien dP und d_1P.

Note. Anwendung auf perspektivische Zeichnung der Alleen, Bogengänge, Fronten der Gebäude, ꝛc. ꝛc.

§. 408. Zusatz.

Man kann auch die Aufgabe des §. 406. dadurch lösen, daß man am Rande der Tafel, $MN = DD_1$ macht, durch das von D_1 gefundene Bild d_1 eine Parallele d_1p mit G_0 zieht und solche verlängert, bis sie die aus einem beliebigen Punkte Q im Horizonte gezogene Linie QM in p trifft, dann pq parallel mit MN zieht, bis sie die QN in q trifft, so wird pq die perspektivische Höhe seyn, so daß man nur noch die qd parallel mit G_0 ziehen darf, um auf der vertikalen d_1d diese perspektivische Höhe abgeschnitten und so in d_1d das Bild von D_1D zu haben; wie solches, der zweiten Auflösung des §. 406. zu Folge, in die Augen fällt.

Im Praktischen pflegt man auf dem Rande MN den Maaßstab abzutragen (die Scale) und dann von Q aus ein für allemal nach den Theilstrichen Linien zu ziehen, damit, wenn die Höhe DD_1 in Fußen gegeben ist, solche sogleich der Zahl nach auf MN angenommen, und die perspektivischen Höhen bloß durch

---

*) Es erhellet dies schon daraus, weil, so oft $CC_1 = DD_1$ ist, dann CD und C_1D_1 zwei horizontale Parallellinien sind, welche allemal einen gemeinschaftlichen Vertiefungspunkt im Horizonte A'A'' haben (nach §. 388.).

zwei zu ziehende parallele Linien d_1p und pq bestimmt werden können (Fig. 116.).

Eine solche Vorrichtung nennt man aber einen Höhen-Maaßstab.

§. 409. Aufgabe.

Einen Höhen-Winkel DB_1D_1, d. h. einen Winkel, dessen einer Schenkel B_1D_1 in der Grund-Ebene G_1 liegt, und dessen Ebene senkrecht auf G_1 steht, perspektivisch zu verzeichnen (Fig. 117.).

Auflösung. Man zeichne das Bild b_1 von B_1 und die perspektivische Richtung b_1d_1 von B_1D_1, bestimme den Theilungspunkt t dieser Linie (d. h. man verlängere b_1d_1 bis zum Horizonte in P, und mache $Pt = PO$, wo O der Hülfspunkt ist, d. h. $OA_2 = AA_2$), mache W. $PtR =$ dem gegebenen W. DB_1D_1, errichte PR senkrecht auf den Horizont, und ziehe b_1R, so ist W. Rb_1d_1 der verlangte perspektivisch gezeichnete Höhen-Winkel.

Beweis. Die Linien AP und AR vom Auge A aus, mit den Schenkeln B_1D_1 und B_1D parallel gedacht, bilden unter sich einen Winkel PAR, welcher dem W. DB_1D_1 gleich und zu gleicher Zeit vertikal ist, so daß RP auf dem Horizonte senkrecht steht. Und weil $AP = OP = tP$ ist, so muß auch W. $RtP =$ W. $RAP =$ W. DB_1D_1 seyn. Umgekehrt also, hat man durch die obige Construktion gerade den Punkt R bestimmt, in welchem die mit B_1D durch das Auge A parallel gedachte AR die Tafel trifft. Zieht man demnach b_1R, so ist solche das Bild von B_1D (nach Anmerk. 1. zu §. 388.); mithin ist Rb_1d_1 das Bild von DB_1D_1.

§. 410. Zusatz.

Es erhellet zugleich aus Anmerk. 1. zu §. 388., daß Rb_1, Rd_1, Re_1 ꝛc. die Bilder sind von Linien, welche alle mit einander und mit der DB_1 parallel laufen und die Grund-Ebene in den Punkten B_1, D_1, E_1 ꝛc. treffen, während diese letztern alle in einer und derselben Geraden B_1 D_1 liegen. Da-

her sind die Winkel Rb_1P, Rd_1P, Re_1P, ꝛc. die Bilder von lauter gleichen Höhen-Winkeln, die eine Horizontallinie in G_1 zum gemeinschaftlichen Schenkel haben, so daß man sagen kann: diese Winkel Rb_1P, Rd_1P, Re_1P, ꝛc. seyen perspektivisch einander gleich (Fig. 117.).

§. 411. Zusatz.

Soll das Bild irgend einer gegen die Grund-Ebene schief stehenden Linie DB_1 gezeichnet werden (welche übrigens die Grund-Ebene in B_1 trifft), so kann:

1) die Lage dieser Linie gegeben seyn durch den Punkt B_1, die Projektion D_1 von D und die Höhe DD_1 und dann wird das Bild von DB_1 gefunden, wenn man die Bilder b_1, d_1 von B_1, D_1 entwirft, über d_1 die Höhe DD_1 perspektivisch zeichnet, und, wenn dd_1 diese perspektivische Höhe ist, die Linie b_1d zieht, welche das verlangte Bild seyn wird; — oder es kann

2) die Lage B_1D durch den Höhen-Winkel DB_1D_1 und den Horizontal-Winkel gegeben seyn (d. h. den Winkel, welchen die Projektion B_1D_1 von B_1D, mit der Grundlinie G_0 bildet), so wie durch den Punkt B_1; dann wird man zuerst den Horizontal-Winkel perspektivisch entwerfen, um das Bild b_1d_1 der Richtung B_1D_1 zu erhalten, und dann den Höhen-Winkel perspektivisch auftragen (nach §. 409.), um in b_1d das Bild der Richtung B_1D zu haben (Fig. 117.).

Anmerkung. In diesem letztern Falle bekommt man jedoch nicht den Endpunkt D perspektivisch entworfen. In den meisten Fällen der Anwendung ist es aber auch mehr um das Bild einer solchen schiefen Richtung, als um das einer völlig begrenzten Linie zu thun.

§. 412. Bemerkung.

Wir haben nun in dem Bisherigen die wichtigsten und praktischen Sätze der Perspektive vorgetragen, weil jeder beliebige Kör-

per nach den bisherigen Regeln bequem wird perspektivisch entworfen werden können. Man entwirft nämlich:

1) alle diejenigen seiner Punkte, Linien ꝛc., welche in der Grund-Ebene G_1 liegen;

2) alle diejenigen Punkte, Linien ꝛc., welche in irgend einer andern mit G_1 parallelen, also ebenfalls horizontalen Ebene liegen; endlich

3) alle einzelnen Punkte, welche man auf dem Wege der N. 2. nicht abbilden will, durch Entwerfung seiner perspektivischen Höhe über G_1;

und die perspektivische Zeichnung des Körpers ist vollendet.

Um aber die N. 2. bequem ausführen zu können, muß man bemerken, daß jede mit G_1 parallele Ebene g_1 als neue Grund-Ebene genommen werden kann. Bestimmt man ihre Durchschnittslinie g_0 mit der Ebene der Tafel und nimmt solche als neue Grundlinie, so wie in ihr den Punkt a_0, wo die Vertikallinie des Auges diese neue Grundlinie g_0 trifft, zum Grundpunkt, so bleiben die Zeichnungen aller in g_1 liegenden Figuren unverändert denselben Regeln unterworfen, wie wenn sie in der alten Grund-Ebene G_1 lägen.

Weil wir aber bisher vorausgesetzt haben, daß die Tafel vertikal stehe und ebene Figuren, welche auf ihr entworfen werden sollen, horizontal liegen, so wollen wir jetzt noch den Fall etwas näher betrachten, wo zwei Ebenen Z_1 und Z_2 ganz beliebig in einer geraden Linie Z_0 sich schneiden und einen ganz beliebigen Winkel mit einander bilden, während in der erstern Z_1, ebene Figuren liegen mögen, welche auf der andern Z_2 als Maler-Tafel für ein vor derselben liegendes und gegebenes Auge A perspektivisch abgebildet werden sollen, welche Lage Z_1, Z_2 oder Z_0 in Bezug auf den Horizont auch immer haben mögen.

§. 413. Bemerkung.

Uebersieht man aber den Grund der bequemen Brauchbar-

keit der Vertiefungs- und Theilungspunkte, des Hauptpunktes, der Grundlinie, des Grundpunktes, der Scale und vorzüglich des perspektivischen Winkelmessers, und lieset man die darüber entwickelten Sätze noch einmal mit Aufmerksamkeit durch, so wird man finden, daß sie sich nicht auf die vertikale Lage der Tafel, und auch nicht darauf gründen, daß die Objektiv-Ebene G_1 auf der Tafel G_2 senkrecht steht, sondern lediglich darauf, daß die durch das Auge gehende Ebene $AA'A''$ mit der Objektiv-Ebene G_1 parallel läuft, daß beide von der Tafel G_2 geschnitten werden, und daß AA_2 und A_0A_2, senkrecht sind auf $A'A''$.

Denkt man sich daher in dem gegenwärtigen Falle, wo Z_1 statt G_1, und Z_2 statt G_2, und Z_0 statt G_0 gegeben sind, durch das Auge A eine Ebene $Aa'a''$ (Fig. 119.) parallel mit Z_1 gelegt, welche die Tafel Z_2 in $a'a''$ schneidet, so muß $a'a''$ mit der Grundlinie Z_0 parallel laufen und muß für die Tafel Z_2 das seyn, was bisher für G_2 der Horizont $A'A''$ war; und so wie alle vom Auge A nach dem Horizonte gehenden Strahlen parallel mit G_1 laufen, daher die G_1 nie treffen, und so wie deshalb von Linien die entferntesten Punkte in G_1 am nächsten im Horizonte gesehen werden, die Linien selbst aber im Horizonte $A'A''$ verschwinden (aufhören), so wird dies hier in Bezug auf die Linie $a'a''$ der Fall seyn, weshalb solche, Grenzlinie heißen mag. Und so wie die Bilder aller in G_1 liegenden und mit einander parallelen Linien in einem und demselben Vertiefungspunkte im Horizonte zusammentreffen, so müssen, aus denselben Gründen, die Bilder aller in Z_1 liegenden und mit einander parallel laufenden Linien in einem und demselben Grenz- oder Vertiefungs-Punkte in der Grenzlinie $a'a''$ zusammenlaufen (Anmerk. 1. zu §. 388.).

Und so wie der Punkt A_2 als Hauptpunkt der Tafel für die Objektiv-Ebene G_1 dadurch erhalten wurde, daß man von A aus auf den Horizont $A'A''$ eine senkrechte Linie fällte, so wird man nun auch von A aus auf die Grenzlinie $a'a''$ eine senkrechte Linie Aa_2 fällen, und a_2 wird der Hauptpunkt der

Tafel für die Objektiv-Ebene Z_1 genannt werden können, während auch A_2a_2 senkrecht auf a'a'' stehen muß, wenn A_2 bereits für eine auf der Tafel Z_2 senkrechte Objektiv-Ebene G_1 vorhanden seyn sollte, oder besser, wenn A_2 etwa als die Projektion von A auf Z_2 gegeben seyn sollte (ein Mittel, wodurch man den Hauptpunkt a_2 für die Objektiv-Ebene Z_1 bequem finden kann, sobald A_2 und a'a'' in Z_2 bereits bekannt sind).

Und die Bilder aller auf Z_0 senkrechten Linien in Z_1, werden sich in dem Hauptpunkte a_2 vereinigen; eben so wie die Bilder aller in G_1 liegenden auf G_0 senkrechten Linien in den Hauptpunkt A_2 ausliefen.

Und fällt man von a_2 aus auf a'a'' oder auf Z_0 die senkrechte Linie a_2a_0, welche Z_0 in a_0 trifft, so ist a_0 der Grundpunkt für Z_1, und macht man in a_2a_0, $a_2\omega = Aa_2$, so wie in der Grenzlinie $a_2a' = a_2a'' = Aa_2$, so ist ω der Hülfspunkt, und a', a'' sind die Distanzpunkte, wie solche früher durch O und A', A'' vorgestellt waren. Und so wie früher aus dem Hülfspunkte O auf A'A'' ein perspektivischer Winkelmesser gezeichnet werden konnte, so kann man jetzt einen solchen aus dem Hülfspunkte ω auf a'a'' eintheilen, und ihn gerade eben so und zu denselben Zwecken benutzen, für alle Winkel, deren Schenkel in Z_1 liegen, wie früher der auf A'A'' eingetheilte zur Abbildung der in G_1 liegenden Winkel diente. Und so wie früher für jede Linie bc in G_2 der Theilungspunkt t dadurch gefunden worden ist, daß man bc bis zum Horizonte A'A'' verlängerte, um den Vertiefungspunkt V zu erhalten und dann in der Richtung A'A'', $VU = VO$ machte, so wird man jetzt für eine in Z_2 gegebene perspektivische Richtung bc den Theilungspunkt t finden, wenn man bc bis zur Grenzlinie a'a'' verlängert, so daß v ihr Durchschnittspunkt mit a'a'', also ihr Vertiefungspunkt ist, und dann in der Richtung a'a'', $vt = v\omega$ macht. Dieser Theilungspunkt giebt dann auf der Grundlinie Z_0 die wahre Länge einer perspektivischen Linie bc in Z_2, wie solcher sie früher auf G_0 gab; weshalb hier auf Z_0 die Scale

(der Maaßstab) abgetragen wird, um solche Längen sogleich als benannte Zahlen ausdrücken zu können.

§. 414. Zusatz.

Es geht also aus dieser Betrachtung hervor, daß alle die praktischen Vortheile, welche dem frühern Vortrage gemäß, der Horizont A′ A″, der Hauptpunkt A_2, der Vertiefungspunkt V und der Theilungspunkt t einer gegebenen perspektivischen Richtung bc, der Hülfspunkt O, die Distanzpunkte A′, A″, der perspektivische Winkelmesser auf A′A″ und die Scale auf G_0 für den Fall gewährten, daß auf der vertikalen Tafel G_2 Bilder von, in der Horizontal-Ebene G_1 liegenden Figuren gezeichnet werden sollen, hier fast unverändert statt finden und benutzt werden können für den gegenwärtigen Fall, wo auf einer beliebig liegenden Tafel Z_2 Bilder einer beliebig liegenden Ebene Z_1 gezeichnet werden sollen, wenn man nur statt der dortigen

A_2, A′, A″, A_0, G_0, G_1, G_2, V, t

jetzt a_2, a′, a″, a_0, Z_0, Z_1, Z_2, v, t,

so wie sie im §. 413. gegeben oder construirt sind, nimmt, und alles Uebrige unverändert läßt.

Den Vertiefungs- und den Höhen-Maaßstab dagegen wollen wir hier, in dem gegenwärtigen Falle, nicht in Anwendung gebracht wissen.

§. 415. Zusatz.

Es erstreckt sich aber die gegenwärtige Untersuchung auf mehrere Fälle, die man in der Anwendung noch unterscheiden muß. Man kann sich nämlich (Fig. 118.): 1) die Tafel Z_2 noch immer vertikal denken, und die Objektiv-Ebene Z_1 ebenfalls vertikal und mit Z_2 einen beliebigen Winkel bildend (wie dies bei perspektivischer Zeichnung architektonischer Gegenstände, z. B. Fronten von Gebäuden ꝛc. ꝛc., so häufig der Fall ist).

In diesem Falle wird man Z_2 mit dem frühern G_2 zusammenfallend annehmen, und Z_1 als eine auf dem frühern G_1 senkrecht stehende Ebene, welche die Z_2 oder G_2 in einer vertikalen Linie Z_0, die G_1 dagegen in einer gegen G_0 einen bestimmten Winkel bildenden Linie BC schneidet, so daß Z_0, G_0 und BC in einem und demselben Punkte zusammentreffen. Construirt man nachgehends das Bild bc von BC auf G_2 oder Z_2 und verlängert bc, bis sie den Horizont A'A'' in a_2 trifft, so ist a_2 der Hauptpunkt der Tafel für die Objektiv-Ebene Z_1, und fällt man nachgehends a_2a'' senkrecht auf G_0, so ist diese Linie die Grenzlinie für diese Objektiv-Ebene Z_1. Und weil $A_2O=$ dem Augen-Abstande AA_2, so ist $Oa_2=$ dem Abstande des Auges A vom Grenzpunkte a_2; also ω der Hülfspunkt für Z_1, wenn $a_2\omega=a_2O$ genommen wird (so daß ω zugleich der Theilungspunkt für die Linie bc wird in Bezug auf G_1). Und für irgend eine perspektivische Richtung de einer in Z_1 liegenden Linie DE ist der Punkt v, wo solche verlängert die Grenzlinie a_2a'' trifft, der Vertiefungspunkt, während t ihr Theilungspunkt wird, wenn man $vt=v\omega$ macht; so daß, wenn man nachgehends td und te zieht, bis sie der Z_0 in D_0 und E_0 begegnen, die Linie D_0E_0 die wahre Länge der in Z_1 liegenden Originallinie DE werden wird. Und will man nachgehends an die Linie de einen Winkel FDE in Z_1 perspektivisch antragen, so zieht man ωv, macht W. $v\omega f=$ W. FDE und zieht df, so ist fde der gesuchte perspektivische Winkel, weshalb man zur größern Bequemlichkeit noch auf $a'a_2a''$ von ω aus einen perspektivischen Winkelmesser construiren kann.

§. 416. Zusatz.

Es kann aber auch

2) die Tafel Z_2 noch immer mit der vertikalen Tafel G_2 zusammenfallen, dagegen Z_1 gegen selbige und gegen die Horizontale G_1 geneigt seyn, und zwar kann Z_0 mit G_0 zusam-

menfallen oder parallel seyn, in welchem Falle a_2 in die Richtung A_2A_0 fällt und a'a'' mit A'A'' parallel läuft; oder es kann Z_0 mit G_0 einen beliebigen Winkel machen, wie (Fig. 119.), wo dann Aa_2 die Hypothenuse ist, des aus den Katheten AA_2 oder OA_2 und a_2A_2 gebildeten rechtwinklichen Dreiecks. Macht man dann $a_2\omega =$ dieser Hypothenuse Aa_2, so ist ω der neue Hülfspunkt; und für eine perspektivische Richtung bc ist dann v der Vertiefungspunkt und wenn $vt = v\omega$ gemacht worden, t der Theilungspunkt, und B_0C_0 ist dann die wahre Länge des in Z_1 liegenden Originals BC, weshalb, um solche als benannte Zahlen hineinbringen zu können, auf Z_0 die Scale (der Maaßstab) abgetragen wird. Und soll dann an bc ein Winkel fbc angetragen werden, dessen Original FBC in Z_1 gegeben ist, so ziehe man ωv und mache W. $v\omega f$ = W. FBC, so ist fbc der gesuchte Winkel; welches noch bequemer bewerkstelligt wird, wenn man aus dem Hülfspunkte ω auf a' a'' ein für allemal einen perspektivischen Transporteur entworfen hat.

§. 417. Zusatz.

Es kann aber auch

3) die Objektiv-Ebene Z_1 horizontal liegen und die Maler-Tafel Z_2 gegen sie geneigt (nach vorne oder nach hinten zu überhängend) und dann wird hinsichtlich der Construktion der Grenzlinie, des Hauptpunktes, Hülfspunktes ꝛc. ꝛc. (gegen §. 416.) auch nicht der geringste Unterschied statt finden, nur daß man im allgemeinen Z_1 mit G_1 und Z_0 mit G_0 zusammenfallend wird annehmen können, und daß man AA_2 senkrecht auf Z_2 gefällt denken muß, wenn A, wie bisher immer, das Auge oder den Gesichtspunkt vorstellt.

Schluß-Anmerkung.

Mit dem bisher Vorgetragenen können wir die gemeine Perspektive auch hinsichtlich ihrer praktischen Vortheile als beendet betrachten. Der mit der Körperlehre (vorzüglich aber mit dem ersten und achten Kapitel dieses Theiles) vertraute Zeichner wird übrigens sowohl die Gründe der mitgetheilten

Methoden leicht übersehen und verfolgen können, als auch für, ihm im speciellen vorkommende Fälle, sich selbst leicht neue Wege eröffnen, die gerade für den gegebenen speciellen Fall die bequemsten seyn dürften. Für den gegenwärtigen Zweck durften wir uns nicht weiter darüber verbreiten, ohne nicht unnützer Weise zu weitläufig zu werden.

Das nächste Kapitel mag sich übrigens noch mit einigen andern Arten von Perspektive, so wie auch mit der Perspektive der Schatten und der Abspiegelungen etwas beschäftigen.

Perspektive.

Drittes Kapitel.

Von der Militär- oder Vogelperspektive und der Cavallierperspektive. Von dem perspektivischen Schatten; und von der Perspektive des Wiederscheins und der Abspiegelung.

§. 418. Bemerkung.

Wir wissen schon (aus §. 383.), daß die Militärperspektive oder Vogelperspektive nichts weiter ist, als die nach einer gegebenen Richtung $\alpha\beta$ (Fig. 102.) genommene Projektion irgend eines Gegenstandes auf der Tafel G_2; daß also ein Gegenstand auf diese Weise perspektivisch abgebildet wird, wenn man von allen seinen Punkten aus mit $\alpha\beta$ parallele Linien zieht und die Durchschnitte derselben mit G_2 sucht. — Die Cavalierperspektive entsteht daraus, wenn $\alpha\beta$ mit G_2 einen Winkel von 45^0 macht.

§. 419. Zusatz.

Aus diesem gehen sogleich, für diese Gattung von Perspektive, folgende praktische Regeln hervor:

1) Die Bilder aller mit einander paralleler Originallinien, sind ebenfalls (geometrisch) parallel.

Note. Dies ist bei der gewöhnlichen Perspektive nicht der Fall, in so fern diese Bilder dort alle in einem und demselben Vertiefungspunkte zusammenlaufen.

2) Und laufen die Originallinien mit der Tafel G_2 oder mit der Grundlinie G_0 parallel, so laufen ihre Bilder ebenfalls mit den Originalen, also im letztern Falle auch mit G_0 parallel. Und eben deswegen hat das Bild einer solchen mit G_2 parallelen Linie mit dieser Linie selbst einerlei Länge. Und dabei sind die Bilder von Vertikallinien ebenfalls vertikal, so oft G_2 eine Vertikal-Ebene ist.

3) Ist eine Originallinie nach irgend einem Verhältniß getheilt und hat man von ihr nebst ihren Theilstrichen die Bilder gefunden, so ist ihr Bild ebenfalls in demselben Verhältniß getheilt, so daß sich die ganze Linie zu ihrem Bilde, wie jeder Theil zu seinem Bilde verhält.

Gleiche Theile im Originale geben daher auch gleiche Theile im Bilde.

Note. Auch dieser Satz gilt in der gewöhnlichen Perspektive nicht für jede Originallinie, sondern nur für diejenigen, welche mit der Tafel G_2 parallel laufen.

Anmerkung. Obgleich in dieser militärischen Perspektive die Bilder der einzelnen Punkte eines Gegenstandes genau zusammenfallen mit dem Schatten, welchen diese Punkte auf G_2 werfen würden, wenn $\alpha\beta$ ein Sonnenstrahl wäre, solche daher in dem zweiten Abschnitte, welcher sich mit der Projektion der Schatten beschäftigt, als bereits vorgetragen angesehen werden kann, so mag hier doch noch mitgetheilt werden, wie man die Tafel auf eine, mit der in der gewöhnlichen Perspektive gebrauchten analoge Art und Weise vorbereiten kann, um nachher Linien und Winkel, ihrer Größe nach mit ähnlicher Bequemlichkeit militär-perspektivisch entwerfen zu können.

§. 420. Erklärung.

Unter der Voraussetzung, daß die Tafel G_2 vertikal stehe, nennt man den obern horizontalen Rand der Tafel A'A'' den

Horizont und einen beliebigen Punkt A_2 in ihm den Hauptpunkt (Fig. 120.), denkt sich durch einen beliebigen andern Punkt α im Horizonte die Richtung $\alpha\beta$, nach welcher die Projektion genommen werden soll (d. h. nach welcher im Unendlichen das Auge gedacht wird) und dann durch diese Richtung eine vertikale Ebene $\beta\alpha\gamma$ gelegt, welche die Tafel G_2 in einer auf dem Horizonte senkrechten Linie $\alpha\gamma$ schneidet; denkt sich ferner durch A_2 eine Linie AA_2 senkrecht auf die Tafel G_2 errichtet und verlängert, bis sie die Ebene $\gamma\alpha\beta$ in dem Punkte A trifft, so ist W. $A\alpha A_2$ der Neigungswinkel der Ebene $\beta\alpha\gamma$ gegen die Tafel G_2, und αAA_2 ist sein Complements-Winkel, oder der Neigungs-Winkel der Ebene $\beta\alpha\gamma$ gegen die auf G_2 senkrechte Vertikal-Ebene, und dieser letztere Winkel heißt die Abweichung des Auges, während der Winkel $\gamma\alpha\beta$, oder vielmehr sein Neben-Winkel, die Höhe des Auges genannt wird. Und wird nachgehends A_2A_0 senkrecht auf den Horizont errichtet, $A_2O = AA_2$ gemacht und durch A eine Linie AO' parallel mit $\beta c'$ gezogen, bis sie die Linie $\alpha\gamma$ in O' trifft, so heißt O der erste, O' dagegen der zweite Hülfspunkt und der Winkel $\alpha AO'$ wird eigentlich die Höhe des Auges genannt. Und W. $A_2O\alpha$ ist die Abweichung des Auges (d. h. = W. $A_2A\alpha$).

Und $AO'A_2$ ist dann der Neigungs-Winkel des Gesichtsstrahles AO' oder $\beta\alpha$ gegen die Tafel G_2; und ist A_2O oder $A_2A = AO'$, so ist dieser Neigungs-Winkel = 45°, wie bei der Cavalier-Perspektive angenommen wird.

§. 421. Zusatz.

Ist daher die Abweichung und die Höhe des Auges gegeben, so nimmt man im obern Rande der Tafel (im Horizonte) $A'A''$ einen beliebigen Punkt A_2 als Hauptpunkt, zieht A_2A_0 senkrecht auf den Horizont, nimmt A_2O beliebig lang, d. h. nimmt in A_2A_0 den Hülfspunkt O beliebig an, macht den Winkel $A_2O\alpha =$ der Abweichung des Auges und bestimmt

dadurch α und $\alpha\gamma$, macht $\alpha\delta = \alpha O$ und W. $\alpha\delta O' =$ der gegebenen Höhe des Auges, so hat man den zweiten Hülfspunkt O' (Fig. 120.).

Denn denkt man sich die Ebene $A\alpha\gamma$ um $\alpha\gamma$ auf $\delta\alpha\gamma$ geklappt, so fällt A auf δ, also AO' mit $\delta O'$ zusammen, sobald $\alpha\delta = \alpha O = \alpha A$ gemacht worden ist.

§. 422. Zusatz.

Aus Gründen, ganz analog denen, welche im §. 391. vorgelegt worden sind, folgt nun, daß, wenn (Fig. 120.) bc, bd die Bilder zweier horizontaler Linien BC, BD sind, dann der Original-Winkel CBD allemal gleich ist dem Winkel mOn, welcher erhalten wird, wenn man durch den zweiten Hülfspunkt O' die Linie $O'm$, $O'n$ mit bc, bd parallel zieht bis an den Horizont, und dann mO, nO auszeichnet.

Denn man denke sich durch O' mit BC, BD zwei Linien $O'P$ und $O'Q$ parallel, so ist W. BCD = W. $PO'Q$. Daß aber dieser letztere, militär-perspektivisch entworfen, den Winkel $mO'n$ giebt, und dabei an sich dem W. mAn, also auch dem W. mOn gleich ist, fällt (dem §. 391. analog) in die Augen.

Anmerkung 1. Man kann daher danach eben so bequem wie im §. 392. seqq. einen gegebenen Original-Winkel perspektivisch entwerfen, als umgekehrt, wenn der perspektivische Winkel gegeben ist, die Größe seines Original-Winkels finden.

Anmerkung 2. Und man kann daher hier ebenfalls auf dem Horizonte $A'A''$ aus dem ersten Hülfspunkte O einen perspektivischen Winkelmesser eintheilen, um diese Winkel sogleich in Graden ausdrücken, oder, wenn sie in Graden gegeben sind, sie sogleich perspektivisch entwerfen zu können.

§. 423. Aufgabe.

Von einer horizontalen Linie BC ist das Bild bc be-

kannt; man soll die wahre Länge des Originals BC finden (Fig. 120.).

Auflösung. Man ziehe durch b die Linie be parallel mit der Grundlinie G_0 und durch den zweiten Hülfspunkt O' die Linie O'n parallel mit bc, mache nT=nO, so ist T der Theilungspunkt für die Richtung bc. Man ziehe nun TO' und mit dieser die Gerade ce parallel, so ist be die wahre Länge des Originals von bc.

Denkt man sich nämlich BE mit G_0 parallel und BE=BC gemacht, so ist CBE ein gleichschenkliches und horizontales Dreieck. Da nun die Richtung be das Bild der Richtung BE ist, und bc das Bild von BC, so darf man nur durch c eine Linie ziehen, welche bce perspektivisch gleichschenklich macht, so muß e das Bild von E seyn. Da nun W. O'nm =W. cbe, so ist Onm=W. CBE und daher W. nOT=W. nTO=W. BCE=W. BEC; und deshalb W. nO'T der perspektische Winkel vom W. BCE oder W. BEC; also, weil bc parallel mit O'n, und ce parallel mit O'T läuft, auch W. bce=W. nO'T der perspektivische Winkel vom W. BCE, und bce das perspektivische Bild des gleichschenklichen Dreiecks BCE. Weil aber BE parallel mit G_0, so ist be=BE=BC.

§. 424. Zusatz.

Und da in dieser (Militär- oder Vogel-) Perspektive die perspektivischen Höhen ihren Original-Höhen congruent sind, so kann man hiernach von jedem Körper 1) die Punkte, Linien und Winkel perspektivisch erwerfen, welche in der Grund-Ebene G_1 liegen, 2) auch die Punkte, deren Projektion auf G_1 und senkrechte Entfernung von G_1 (Höhe) gegeben ist; folglich den ganzen Körper.

Von dem perspektivischen Schatten.

§. 425.

Wenn ein Körper hinter der Tafel von der Sonne oder von irgend einem andern Lichte beleuchtet wird, so wirft er entweder auf einen andern Körper, oder auf die Grund-Ebene G_1,

oder auf eine vertikale Ebene, oder auf irgend eine gegebene Ebene E Schatten und man kann verlangen, diesen Schatten ebenfalls auf der Tafel perspektivisch zu entwerfen. Man hat dazu zwei Wege:

1) Entweder man construire den Schatten, den der Körper wirklich im Originale wirft nach Anleitung der vorhergehen zweiten Abtheilung und betrachte dieses Schattenbild als einen neuen Original-Gegenstand, welcher nun perspektivisch auf die Tafel G_2 entworfen werden muß;

2) oder man construire jeden einzelnen Schattenpunkt unmittelbar perspektivisch, indem man die Bilder zweier Linien perspektivisch entwirft, deren Durchschnittspunkt der Original-Schattenpunkt seyn würde. Welche Linien aber in ihrem Durchschnittspunkte den Original-Schattenpunkt enthalten müssen, geht ebenfalls aus der vorstehenden zweiten Abtheilung der geometrischen Zeichenkunst hinlänglich hervor.

Anmerkung. Dies findet statt, mag die Perspektive, welche verlangt wird, die gemeine oder die Militär-Perspektive seyn.

Von der Perspektive des Wiederscheins und der Abspiegelung.

§. 426.

Werden Original-Gegenstände von einer spiegelnden Fläche zurückgeworfen, so daß das Auge außer dem Gegenstande selbst auch noch seinen Wiederschein oder seine Abspiegelung wahrnimmt, so muß solche in der perspektivischen Zeichnung ebenfalls sichtbar gemacht werden. Dazu kann man das Princip benutzen:

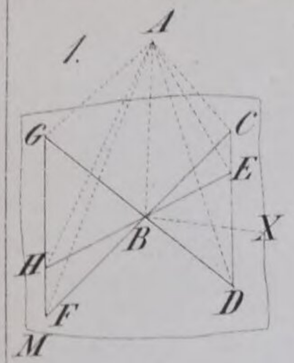
1) Man fälle von jedem Punkte α des Original-Gegenstandes auf die spiegelnde Fläche eine senkrechte Linie und nehme in ihrer Verlängerung hinter der spiegelnden Fläche einen Punkt α' eben so weit von letzterer abstehend als α von ihr absteht, so ist α' als ein Originalpunkt der Abspiegelung (des Spiegelbildes) anzusehen.

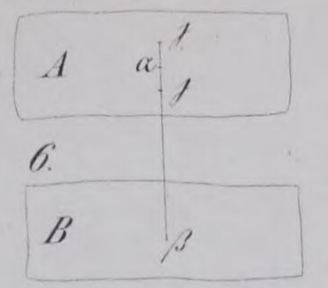
2) Man entwerfe diesen Punkt α' perspektivisch, so hat man das perspektivische Bild des Original-Spiegel-Bildes des Punktes α, welcher ein Punkt des abgespiegelten Gegenstandes ist.

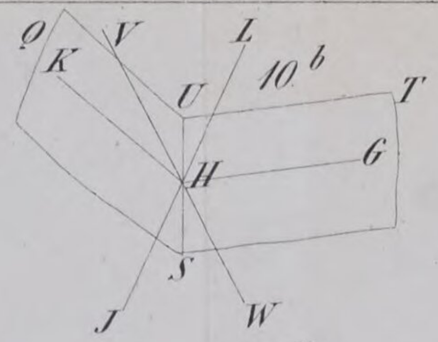
Schluß-Anmerkung.

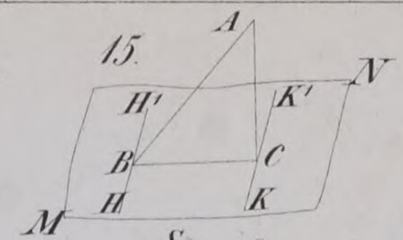
Da es unsere Absicht nicht war, eine vollständig praktische Anweisung zur Perspektive zu schreiben, sondern die praktischen Hand- und Kunst-Griffe nur in der Absicht mitzutheilen, um ihre geometrische Begründung nachweisen zu können; da also dieser Vortrag nur dazu dienen soll, den Anfänger mit den theoretischen und praktischen Grundregeln der Perspektive und mit den Principien, auf welche sie sich stützen, bekannt zu machen, und ihn dadurch in den Stand zu setzen, die praktischen Anweisungen beurtheilen und im vorkommenden Falle sich selbst helfen zu können, so müssen wir hier abbrechen, und das Weitere größeren und blos der Perspektive allein gewidmeten Werken überlassen.

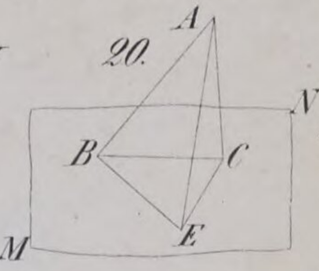
Gedruckt bei den Gebr. Unger.

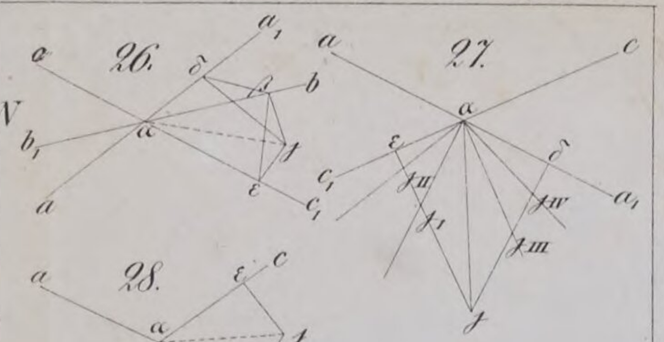

1.
A
G
C
E
B
X
H
F
D
M

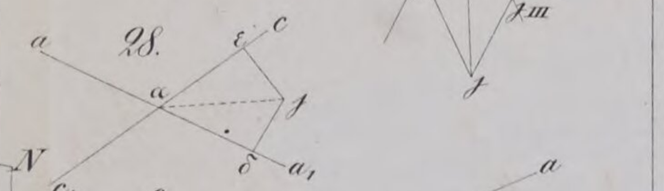

A
a
1
6.
B
β

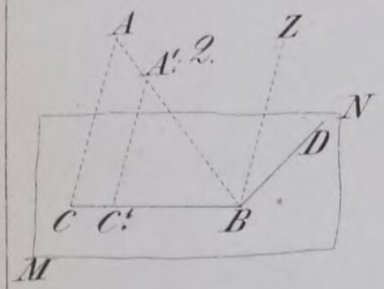

Q
V
L
K
U
10. b
T
H
G
S
J
W

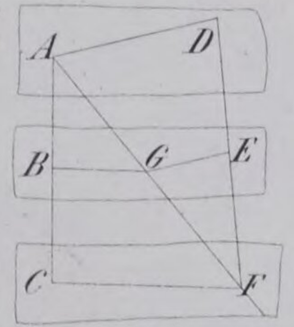

15.
A
N
H'
K'
B
C
M
H
K

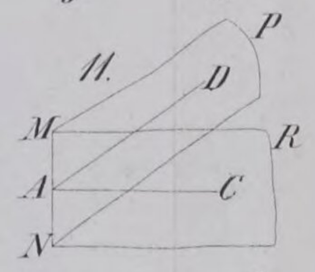

20.
A
N
B
C
M
E

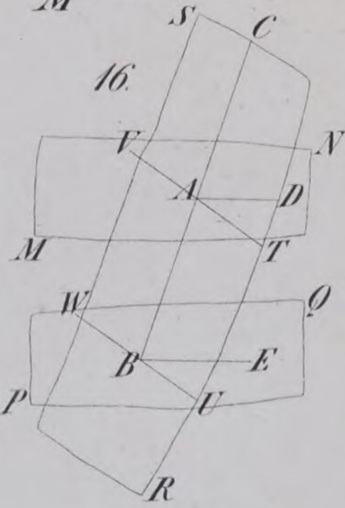

26.
a1
a
δ
β
b
b1
α
1
ε
c1
a
27.
c
ε
δ
c1
1II
1IV
a1
1I
1III
1

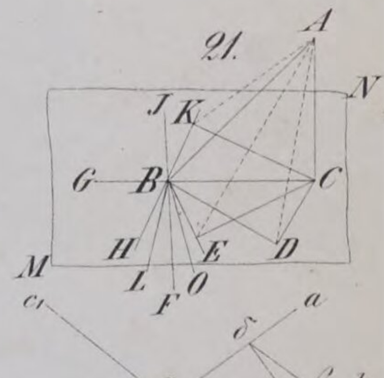

28.
a
ε
c
α
1
c1
δ
a1

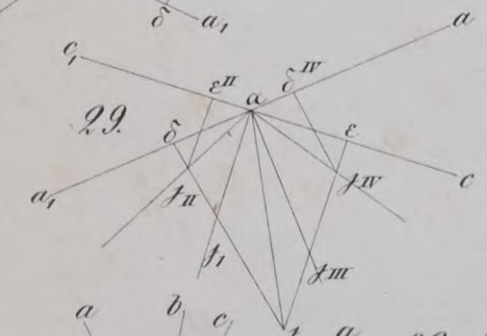

A
A'
2.
Z
N
D
C
C'
B
M

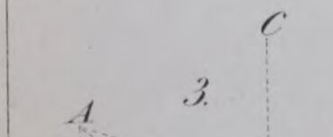

7.
A
D
B
G
E
C
F

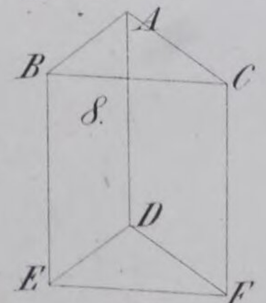

11.
P
D
M
R
A
C
N

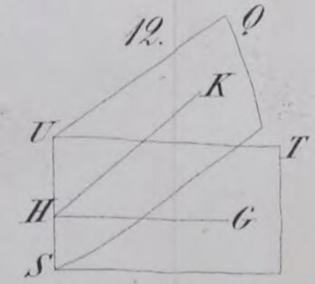

S
C
16.
V
N
A
D
M
T
W
Q
B
E
P
U
R

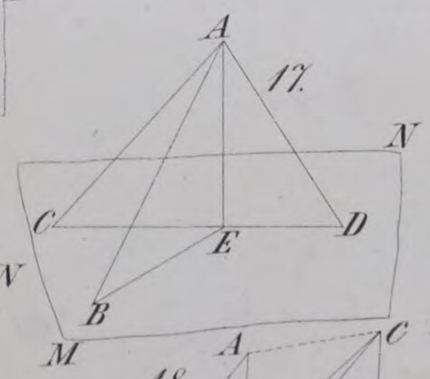

A
21.
N
J
K
G
B
C
M
H
E
D
L
O
F

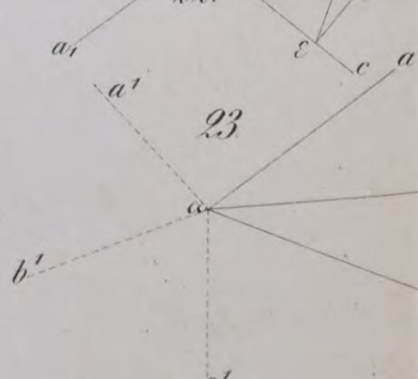

a
c1
29.
δ
ε
α
1II
1IV
c
a1
1I
1III
1

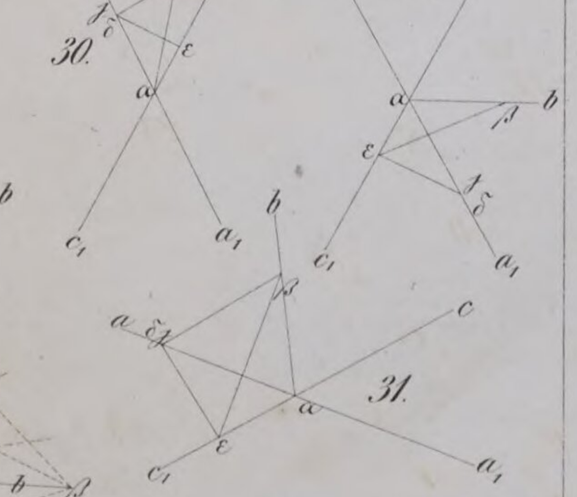

C
3.
A
N
D
B
E
M

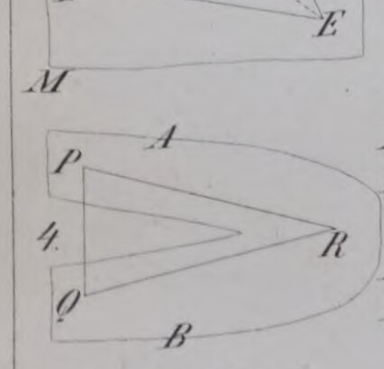

B
A
C
8.
D
E
F

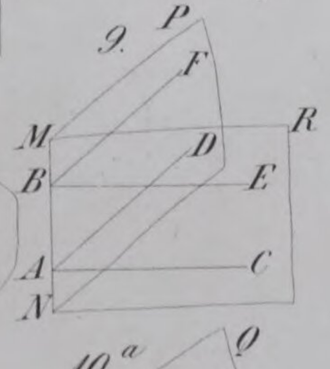

12.
Q
K
U
T
H
G
S

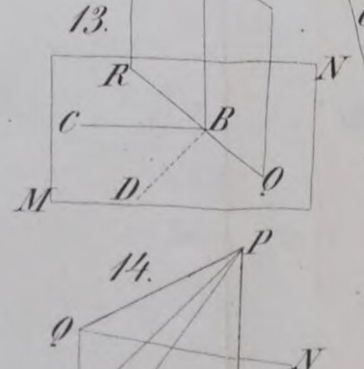

A
17.
N
C
D
E
B
M

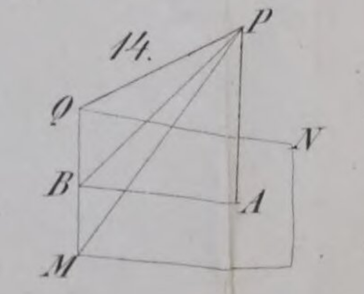

a
a'
23
b
α
b'
c
c'

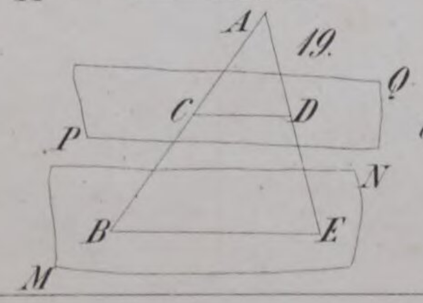

a
b
c
32.
α
β
ε
δ
a1
c1

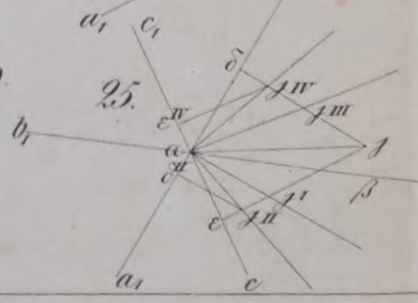

P
A
4.
R
Q
B

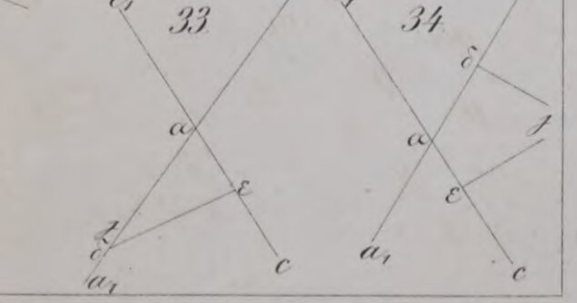

9.
P
F
M
R
D
B
E
A
C
N

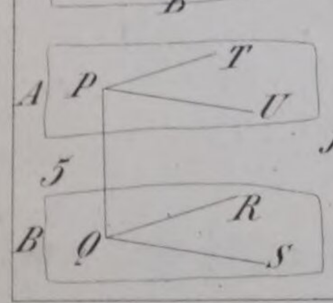

P
A
13.
R
N
C
B
M
D
Q

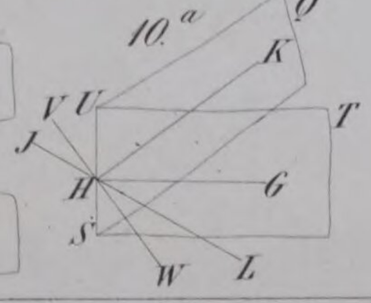

14.
P
Q
N
B
A
M


A
18.
C
D'
N
B'
D
F
E
M


δ
c1
a
24.
b1
α
β
b
c
ε
a1


c1
33.
a
α
ε
δ
a1
c
c1
34.
a
ε
α
1
ε
a1
c

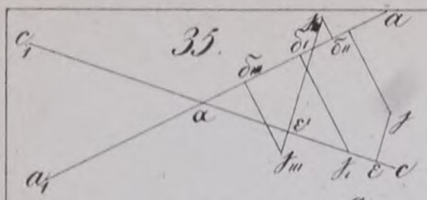

A
P
T
U
5
B
Q
R
S


10. a
Q
K
V
U
T
J
H
G
S
W
L

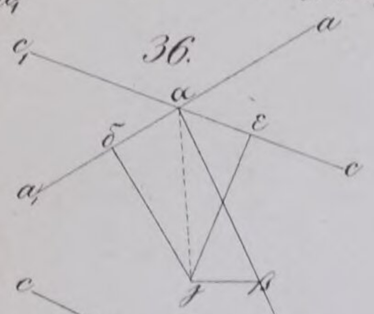
A
19.
Q
C
D
P
N
B
E
M

c1
a
δ
25.
b1
1IV
ε
1III
α
1
ε
1'
β
b
c
1II
a1
c

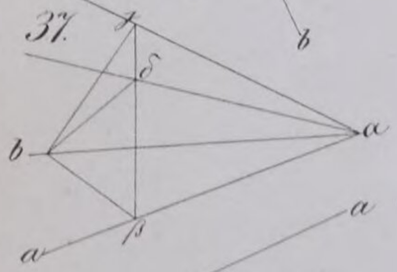
35.



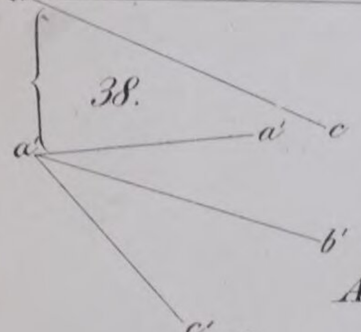
36.



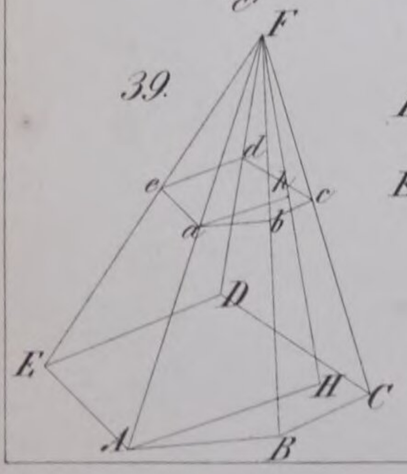
37.



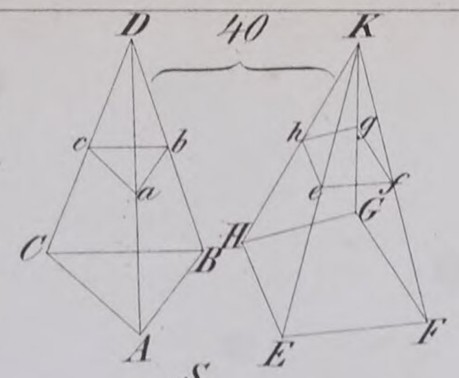
38.



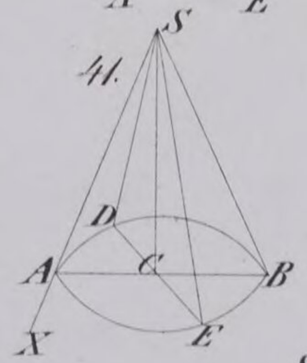
39.



40

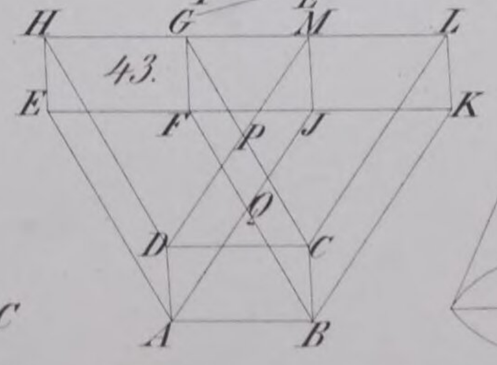


41.

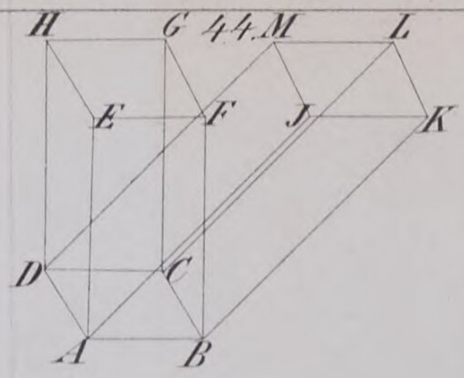


42.

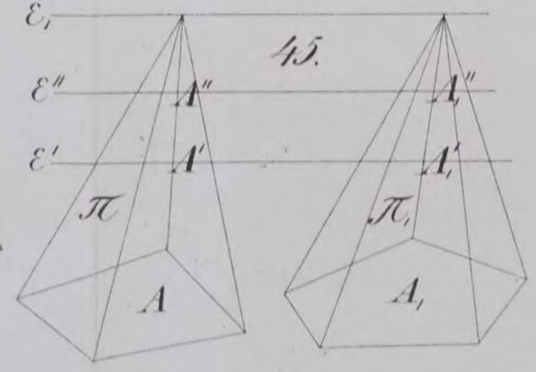
43.



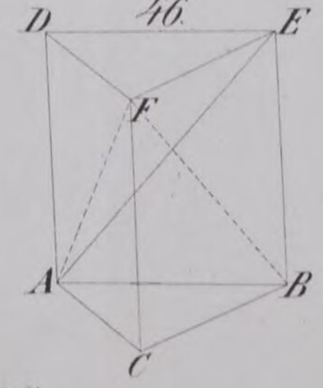
44.



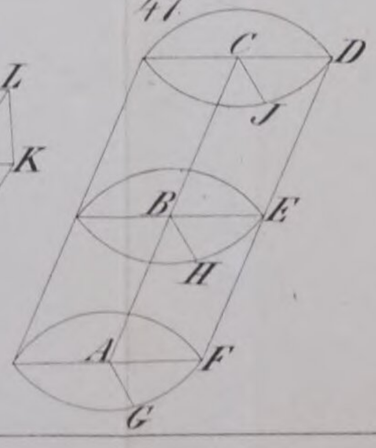
45.



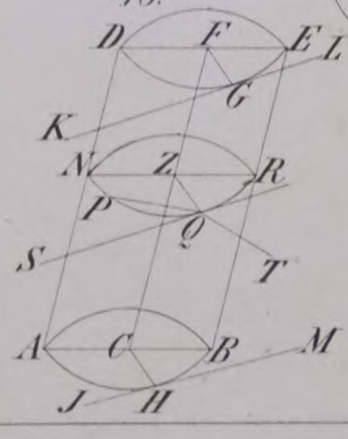
46.



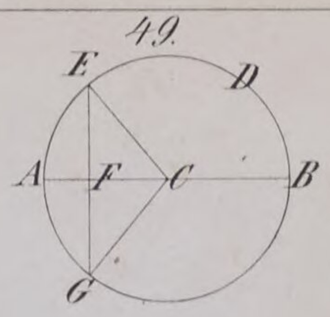
47



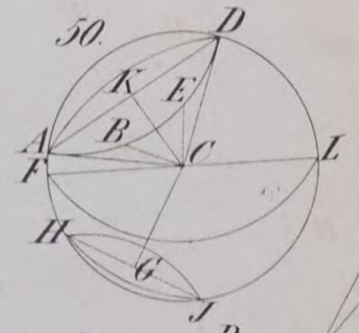
48.



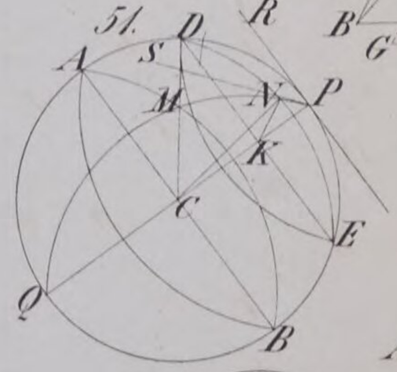
49.



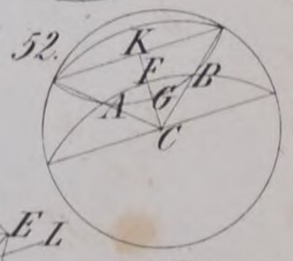
50.



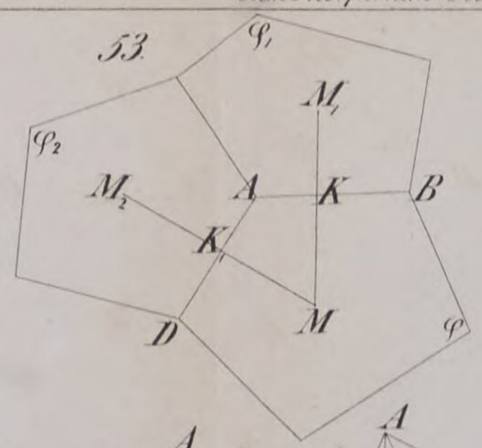
51.



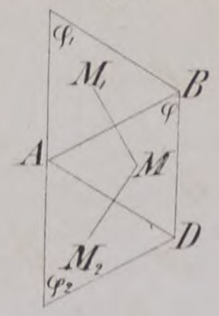
52.



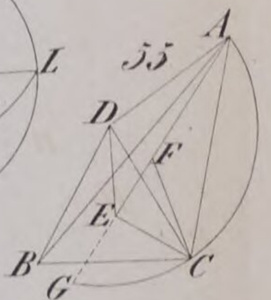
53.



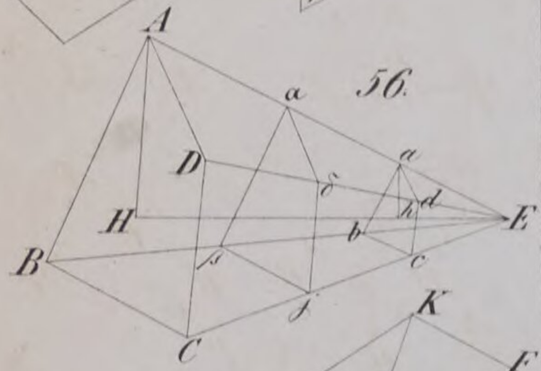
54.



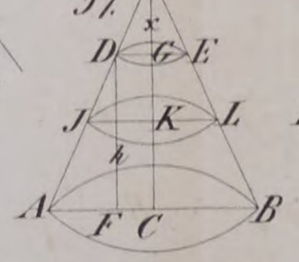
55



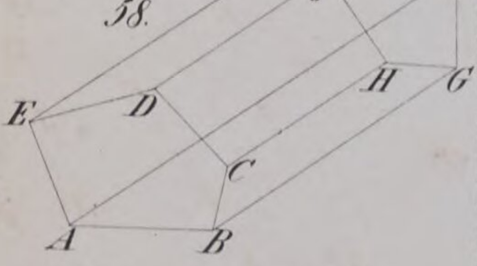
56.



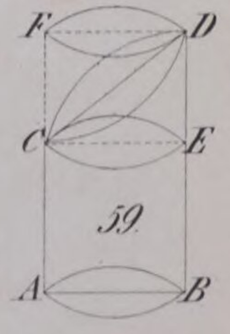
57.



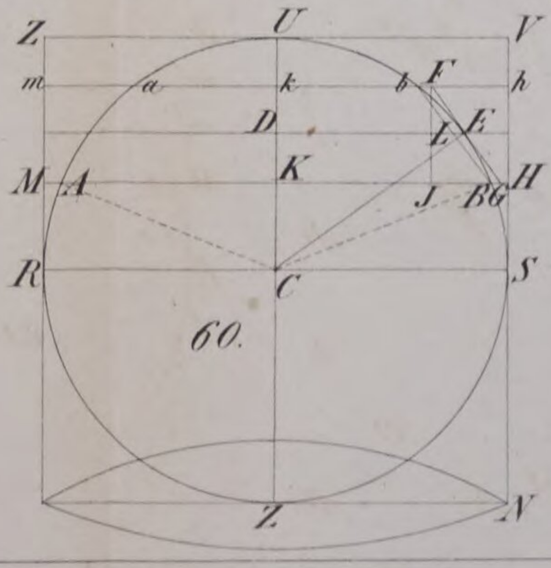
58.



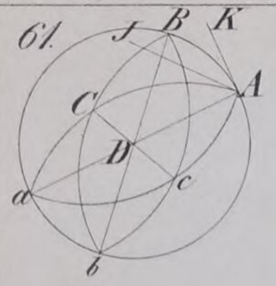
59.



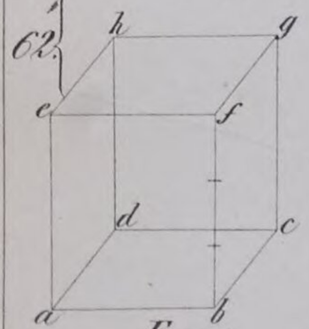
60.



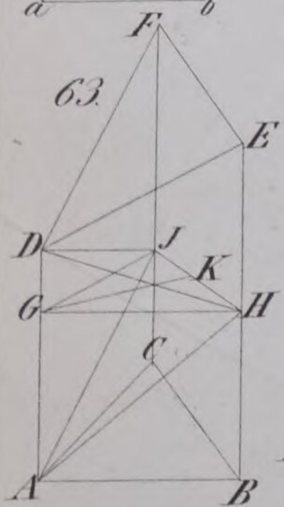
61.



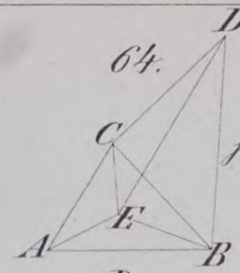
62.



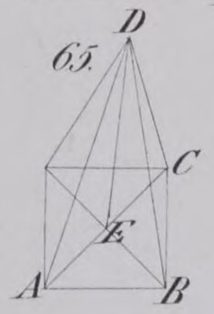
63.



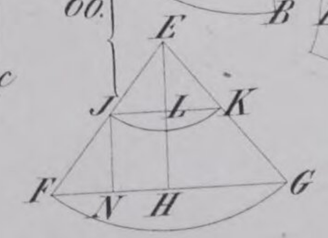
64.



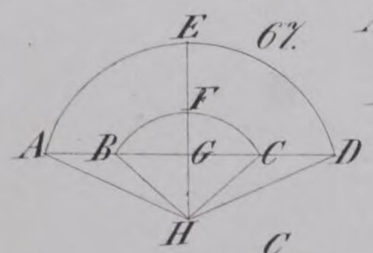
65.



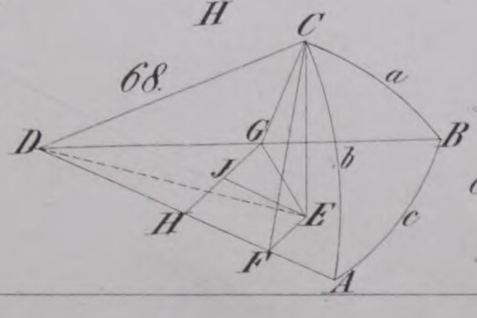
66.



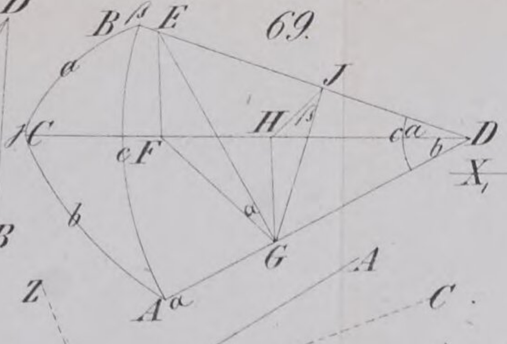
67.



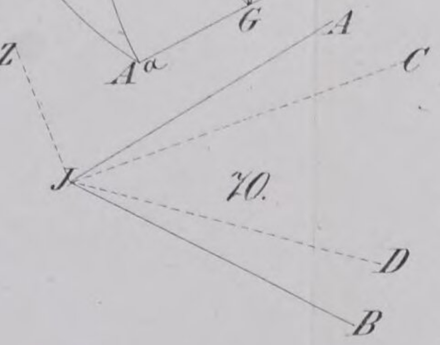
68.



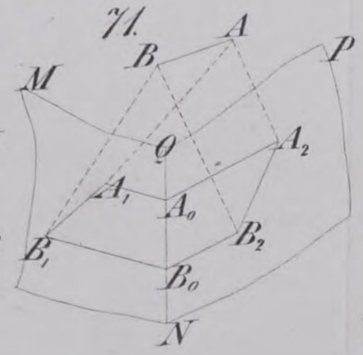
69.



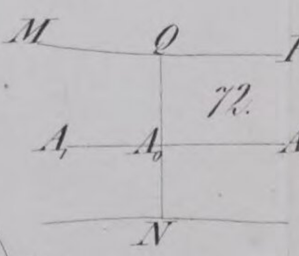
70.



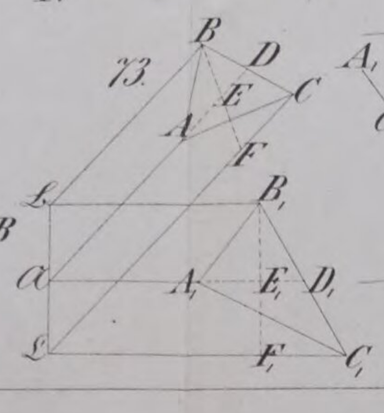
71.



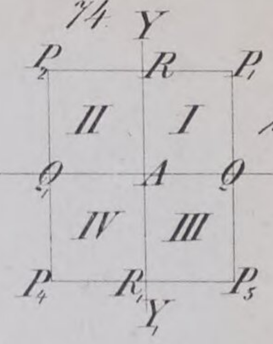
72.



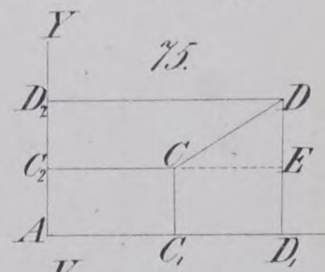
73.



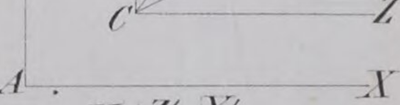
74.



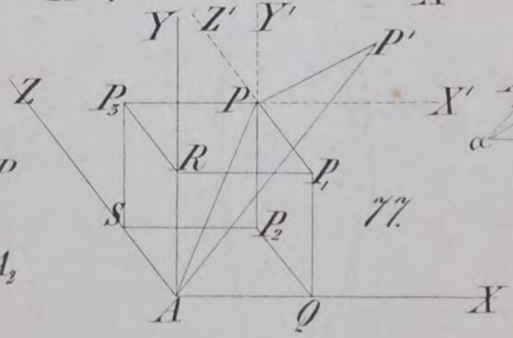
75.



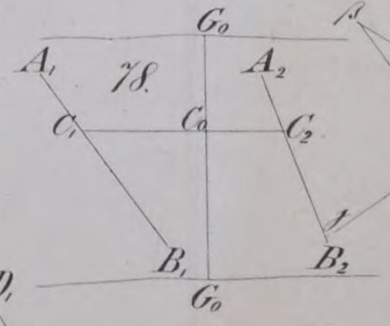
76.



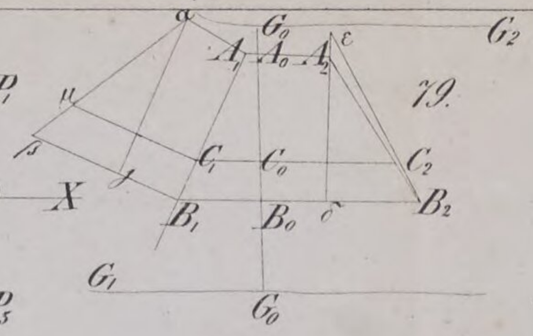
77.



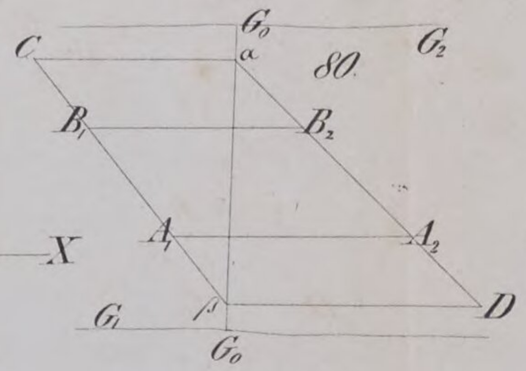
78.



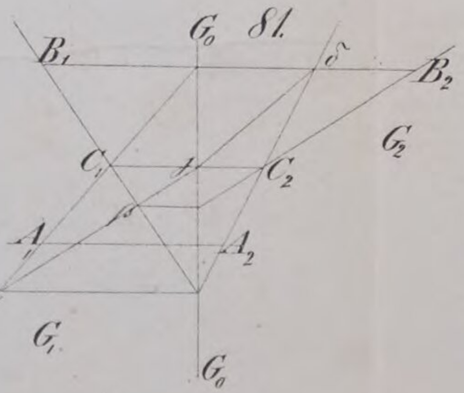
79.



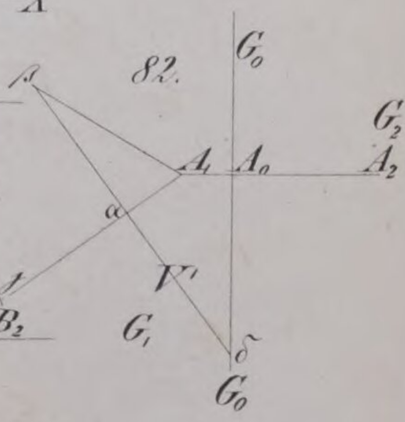
80.



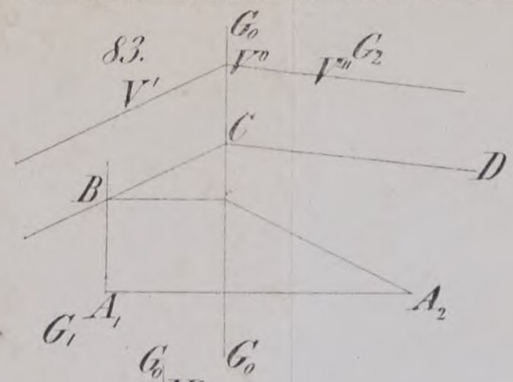
81.



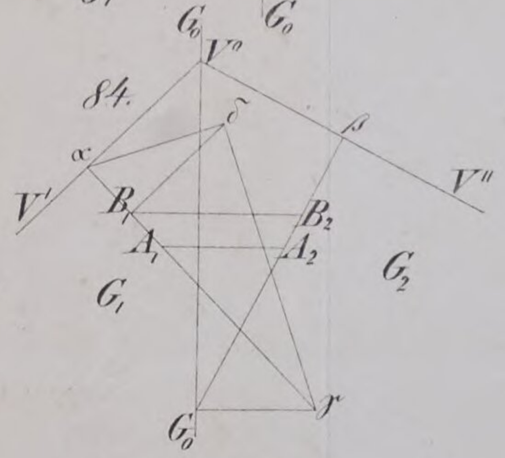
82.



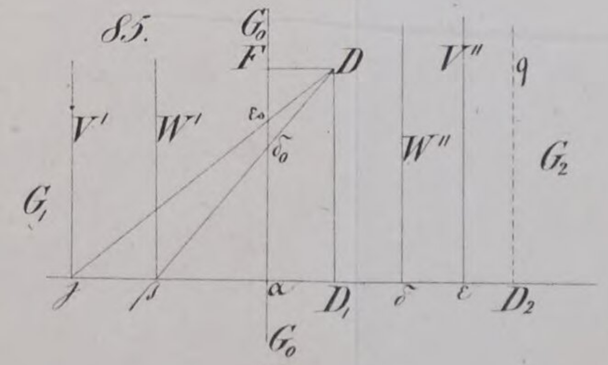
83.



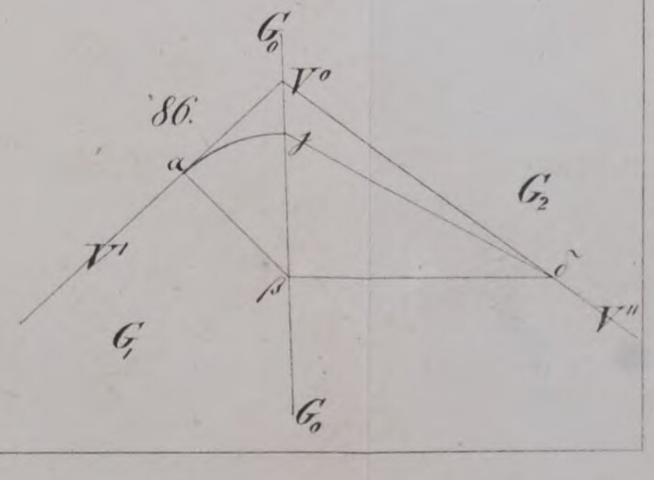
84.



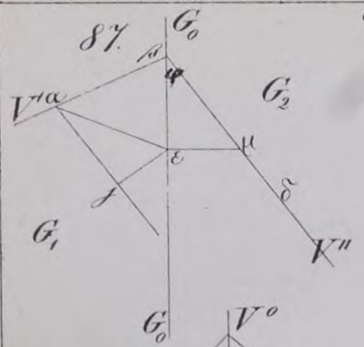
85.



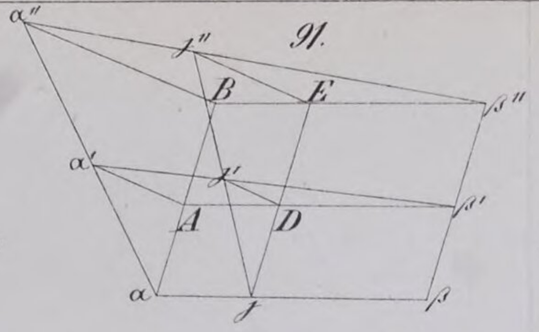
86.



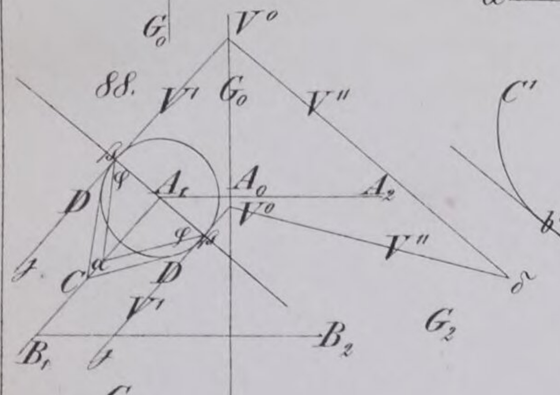
87.



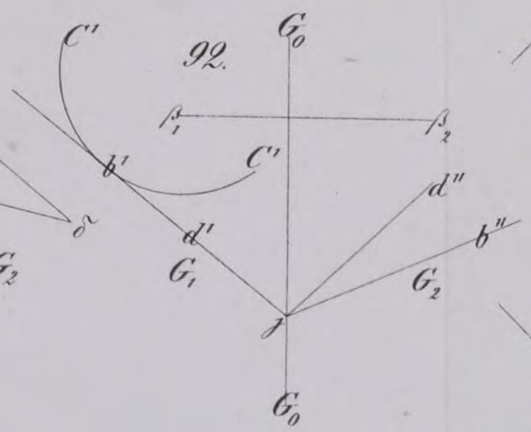
91.



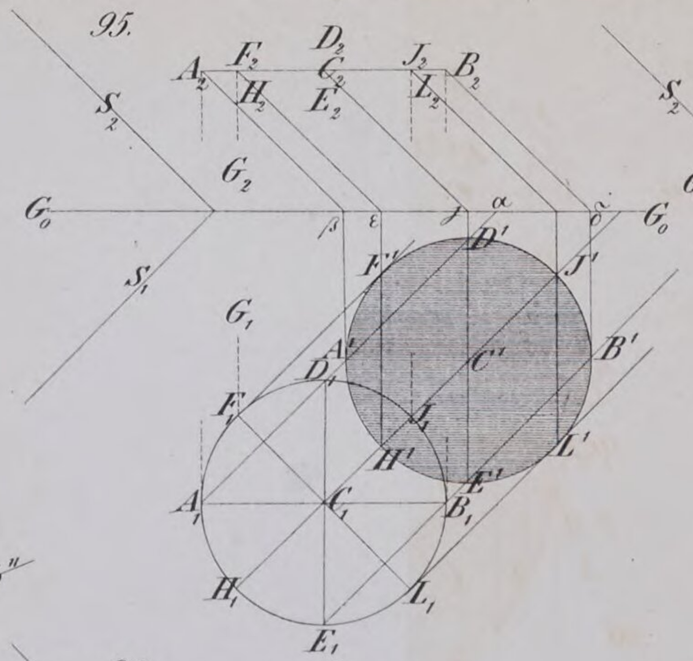
88.



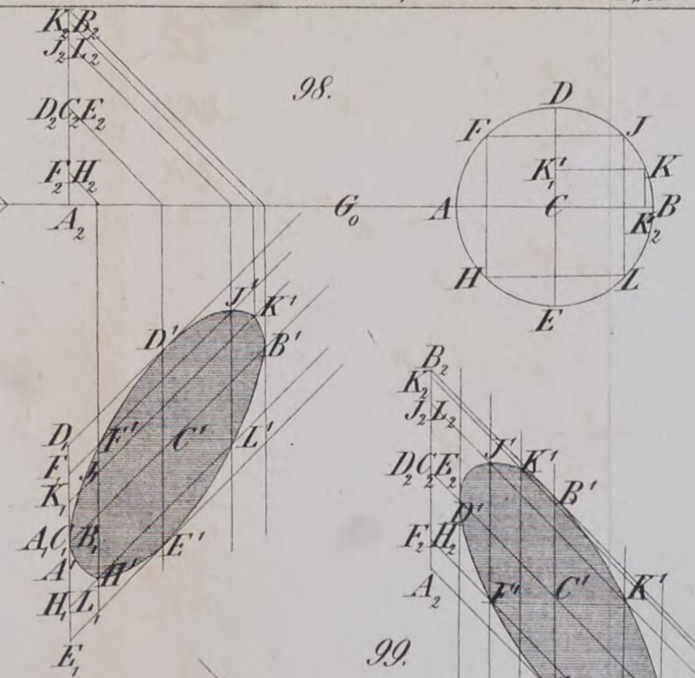
92.



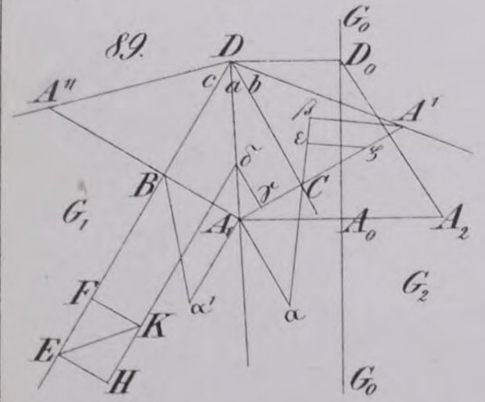
95.



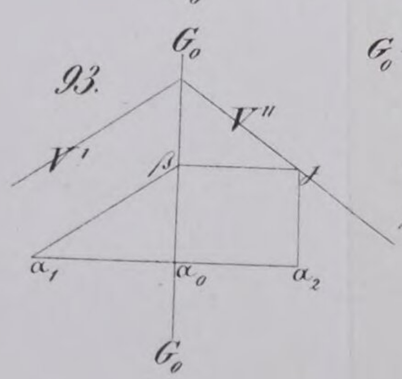
98.



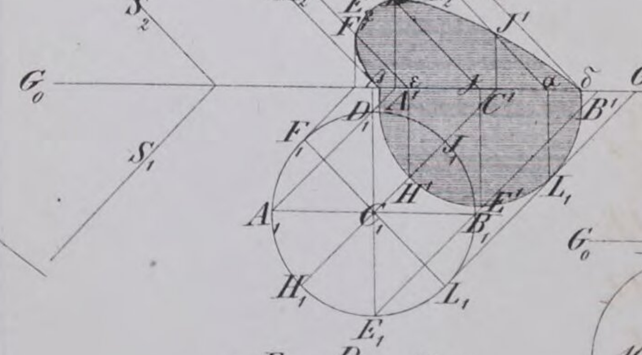
89.



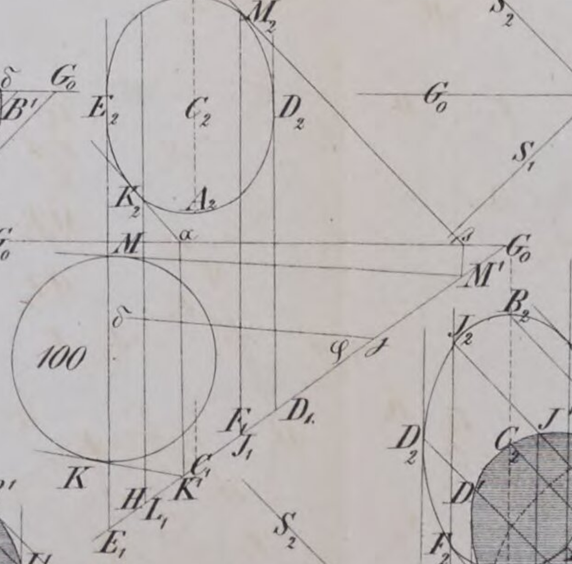
93.



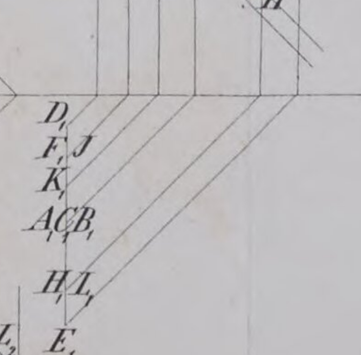
96.



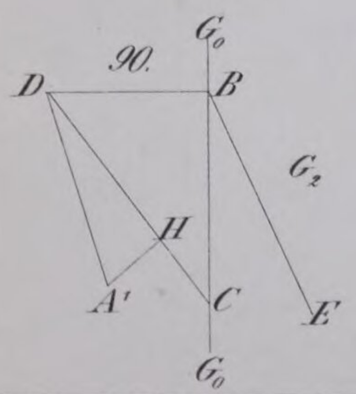
100



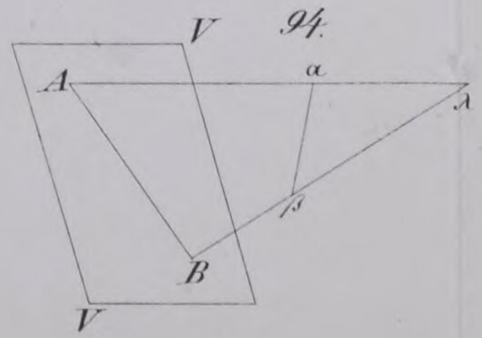
99.



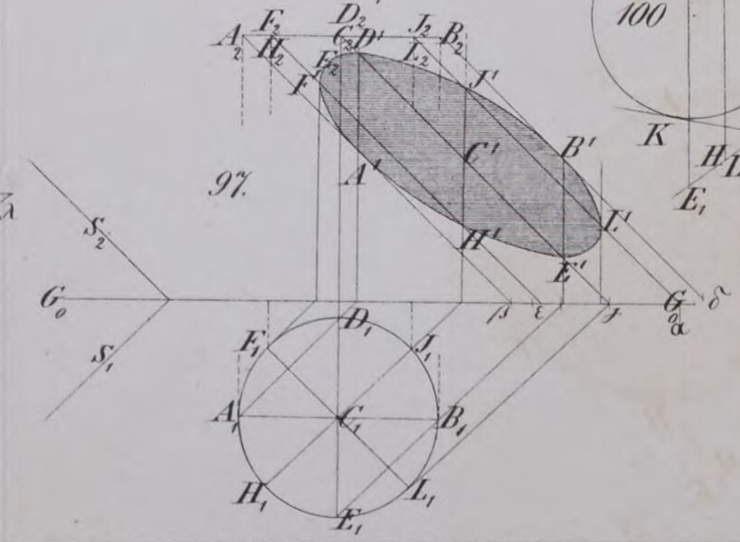
90.



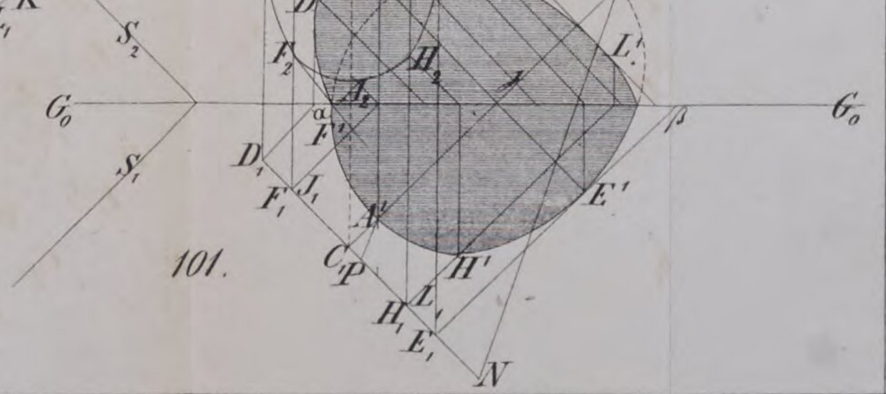
94.



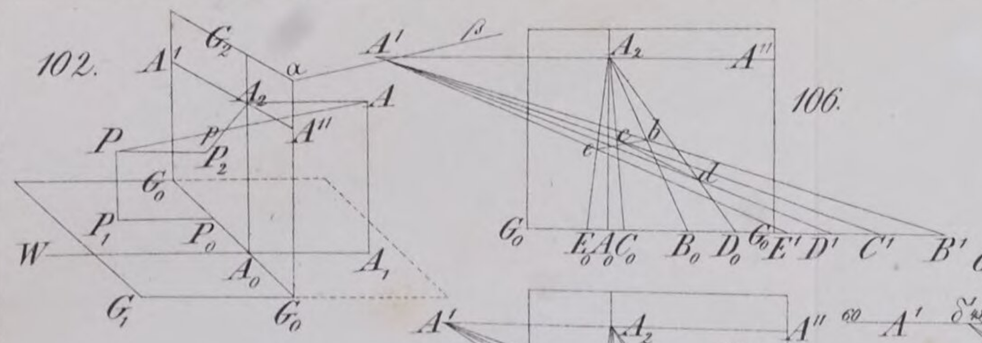
97.



101.

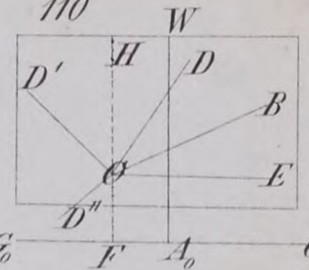


102.

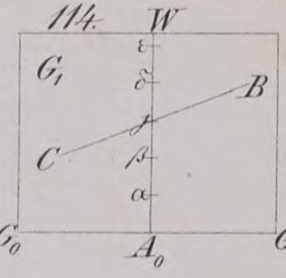


106.

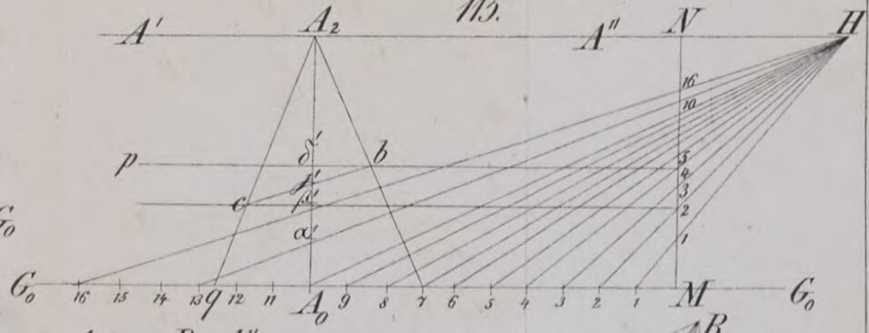
110



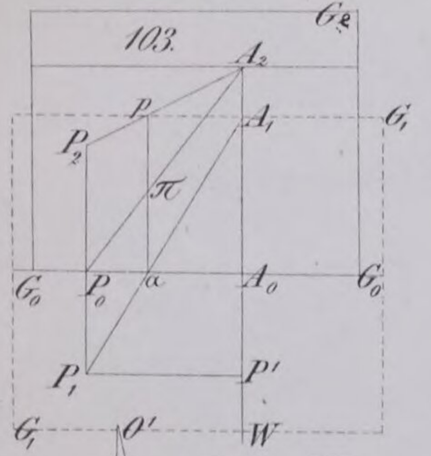
114.



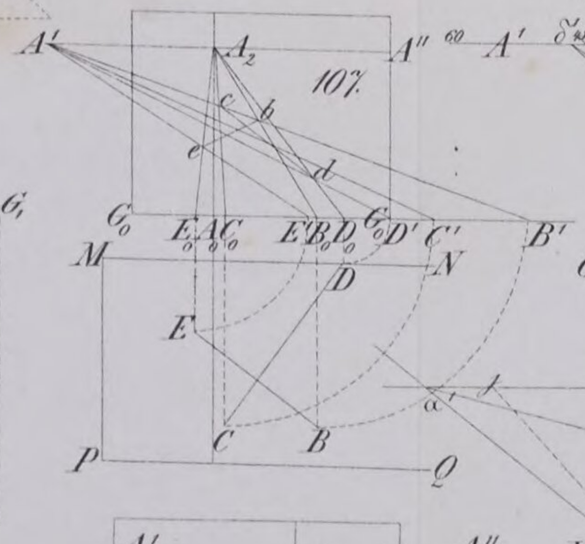
115.



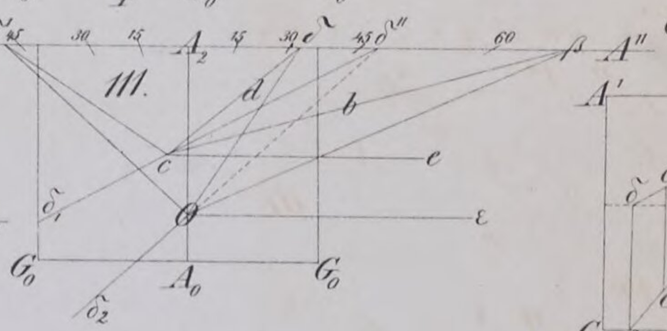
103.



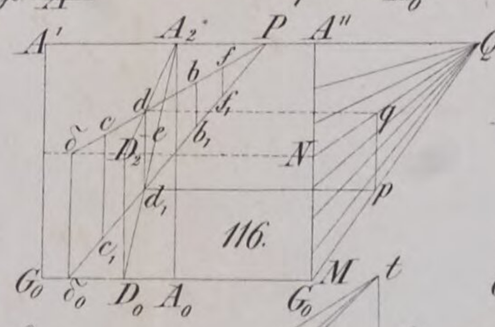
107.



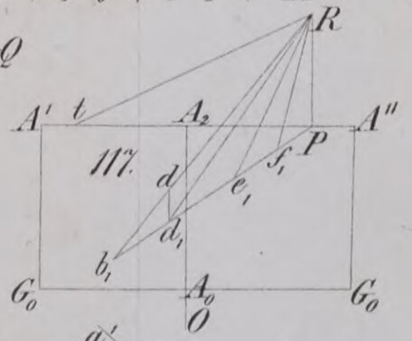
111.



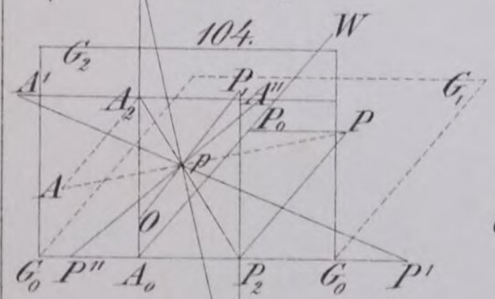
116.



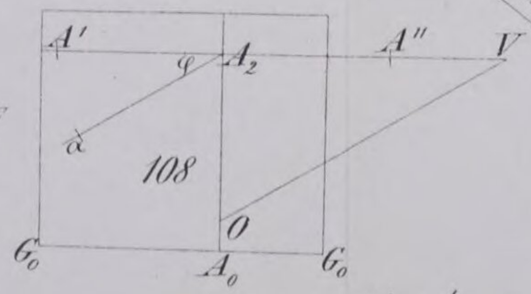
117.



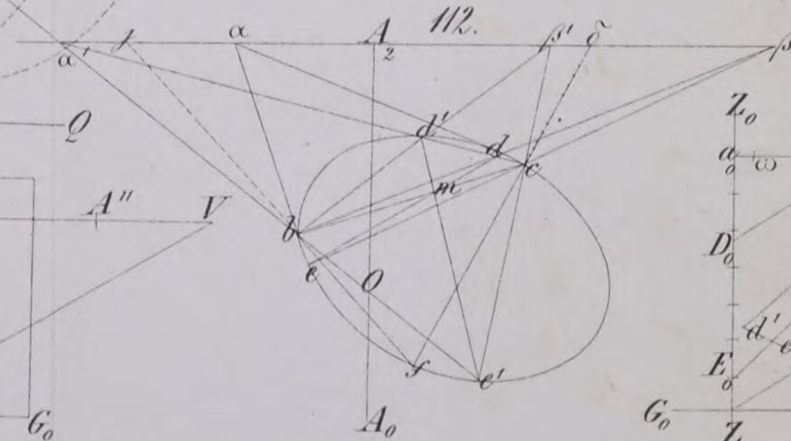
104.



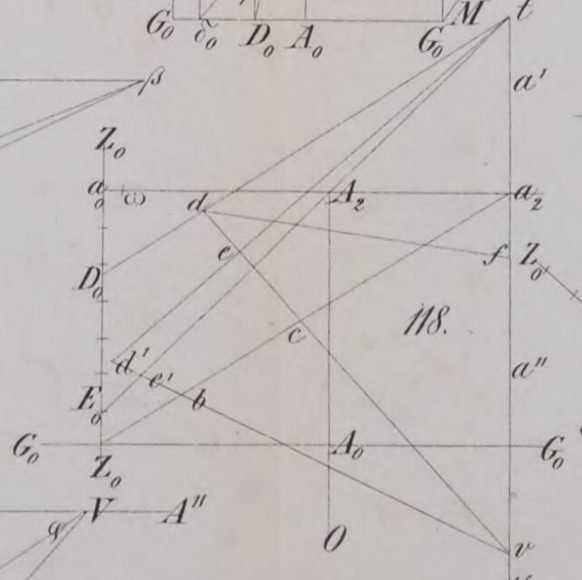
108



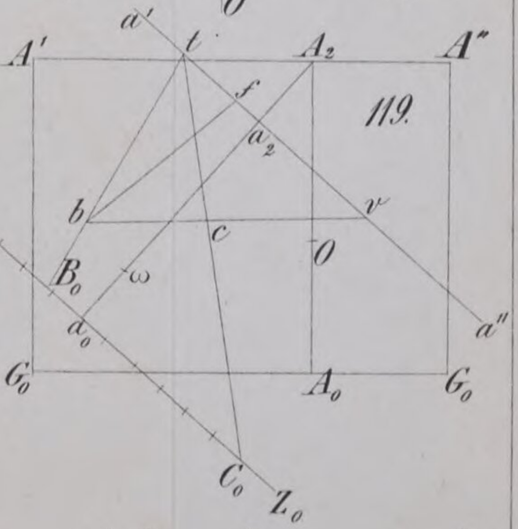
112.



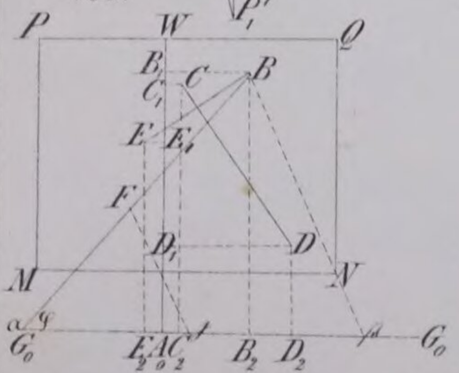
118.



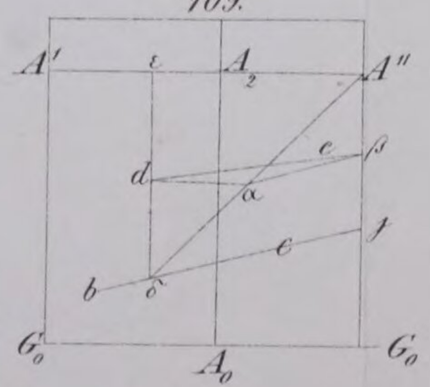
119.



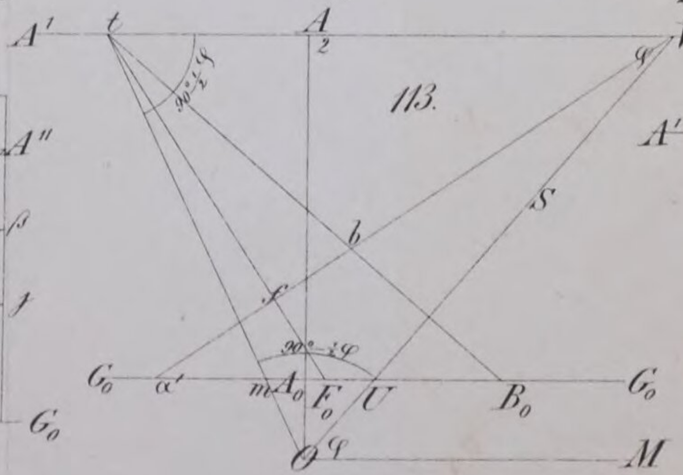
105.



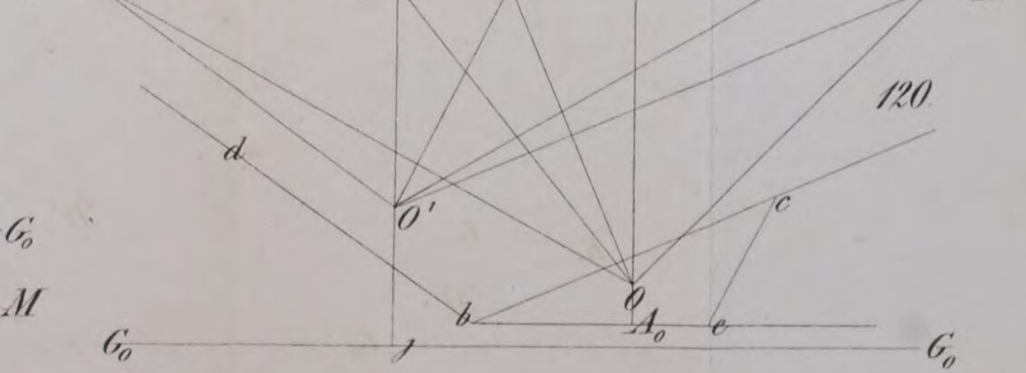
109.



113.



120



Math. 8°

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Die körperliche Raum-Grössen-Lehre mit Inbegriff der sphärischen Trigonometrie, der beschreibenden Geometrie, der Projektion der Schatten und der Perspektive zum Gebrauche an höhern technischen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet und mit

Berlin 1839

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 634 -3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267607-6